Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1932)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONOÏDE DROIT A NOYAU SPHÉRIQUE

Autor: d'Ocagne, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24620

SUR LE CONOÏDE DROIT A NOYAU SPHÉRIQUE

PAR

M. D'OCAGNE, Membre de l'Institut (Paris).

L'objet de cette note est de faire connaître un exemple simple d'application de la théorie des intégrales elliptiques, relatif à un problème de cubature.

On sait que le conoïde droit à noyau sphérique est une surface réglée du quatrième ordre, à centre, engendrée par une droite rencontrant à angle droit une directrice rectiligne en restant tangente à une sphère.

Sur la figure ci-contre, la directrice rectiligne est (ac, $a'c'$). Coupons la surface par un plan de trace horizontale mm_1, normal à la perpendiculaire oc abaissée du centre de la sphère sur la directrice et cherchons à évaluer le volume V limité par ce plan, la directrice et le conoïde.

En appelant z la cote rapportée au plan d'équateur de la sphère (de trace verticale $o'c'$), r le rayon de cette sphère et S la surface du triangle amm_1, nous avons

$$V = \int_{-r}^{r} S dz = 2 \int_{0}^{r} S dz \; .$$

Or, si nous appelons ρ le rayon du petit cercle de la sphère, de cote z, auquel sont tangentes les génératrices ab et ab_1, nous avons d'abord, en posant $ao = l$, $an = h$,

$$S = \frac{h^2}{l^2} \cdot l . oe = \frac{h^2}{l} \cdot \frac{oa . ob}{ab} = \frac{h^2 \rho}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} = \frac{h^2 r \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}$$

puis

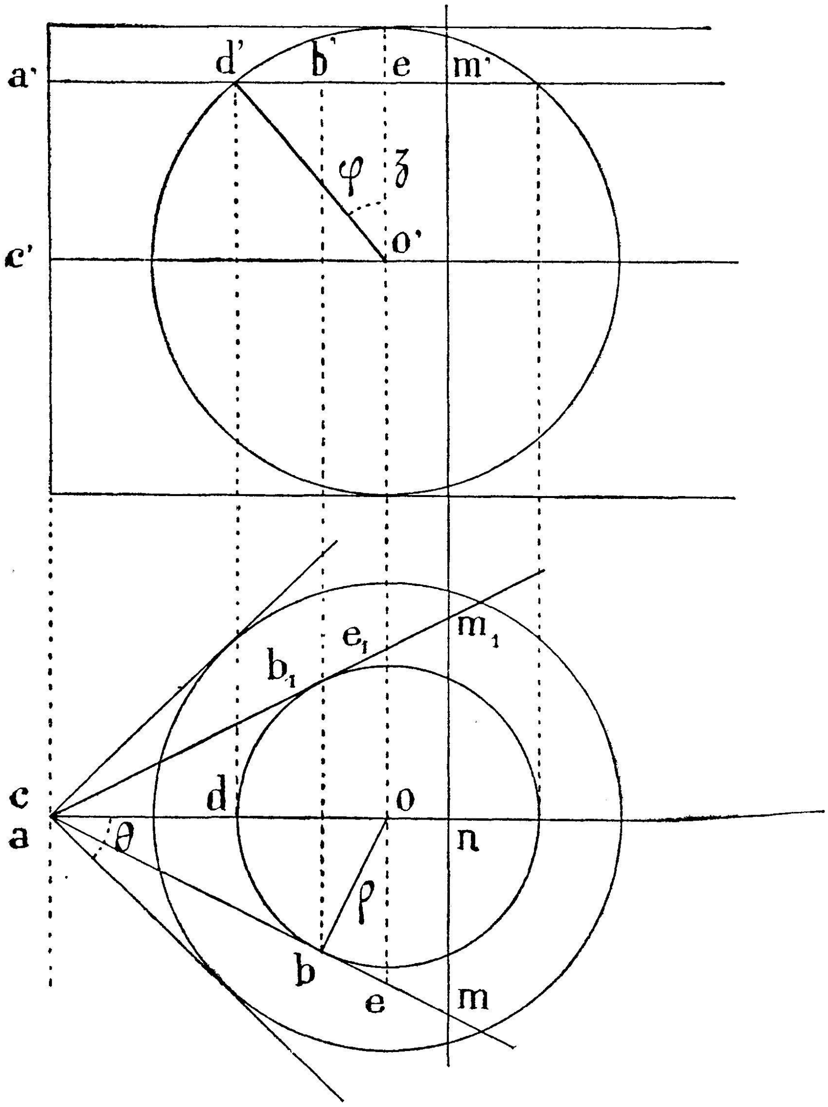
$$z = r \cos \varphi \qquad \text{d'où} \qquad dz = - r \sin \varphi \, d\varphi \; ,$$

d'où nous déduisons

$$V = 2h^2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi = 2\frac{h^2r^2}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}}\, d\varphi\ .$$

Si nous représentons par

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{et} \quad E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$



les intégrales elliptiques de première et seconde espèce de Legendre, de module $k < 1$, où k peut être pris égal à $\frac{r}{l}$ nécessairement < 1, on voit que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{l^2}{r^2}\left[F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{l}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{l}\right)\right]$$

et, par suite, que

$$V = 2h^2 l\left[F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{l}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{l}\right)\right]. \tag{1}$$

On peut remarquer que, si pour deux conoïdes $\frac{r}{l}$ et $h^2 l$ ont les mêmes valeurs, le volume sera le même pour ces deux conoïdes. D'ailleurs, pour une même valeur de $\frac{r}{l}$, les conoïdes sont semblables; en ces conoïdes semblables les volumes seront donc équivalents si la valeur de $h^2 l$ est la même.

On peut remarquer que si, avec Legendre, on représente le module, ici égal à $\frac{r}{l}$, par $\sin \theta$, l'angle θ est celui que les génératrices du conoïde situées dans le plan d'équateur du noyau sphérique (contour apparent en projection horizontale) font avec le plan de symétrie contenant la directrice et le centre du noyau.

En se servant des tables de Legendre, on trouve, pour le coefficient numérique K qui multiplie $h^2 l$ dans l'expression (1) de V, les valeurs suivantes:

pour	$\theta = 15°$,	$K = 0,10798$,
	$30°$,	$0,43658$,
	$45°$,	$1,00686$,
	$60°$,	$1,89092$,
	$75°$,	$3,38332$.

Mais, avec la limite supérieure $\frac{\pi}{2}$ de φ, il n'est pas besoin de faire intervenir les intégrales elliptiques si l'on a recours au développement de la fonction hypergéométrique G de Gauss, savoir

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot \frac{x}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

On sait, en effet, que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi}}\, d\varphi = \frac{\pi}{4} G\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{r^2}{l^2}\right),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{2} G\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{r^2}{l^2}\right) \frac{h^2 r^2}{l} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{l^2}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{r^2}{l^2} + \frac{15}{32}\frac{r^4}{l^4} + \dots\right) h^2 l \,. \end{aligned}$$

Si l'on se borne aux trois premiers termes du développement, on trouve, pour $\frac{r}{l} = \frac{1}{2}$ (c'est-à-dire $\theta = 30°$)

$$V = 0{,}43527\, h^2 l \,.$$

Le coefficient numérique ne diffère que de 0,00131 de celui obtenu plus haut pour cette même valeur de θ.

SUR LA COURBE D'ARCHYTAS

PAR

M. d'Ocagne Membre de l'Institut, (Paris).

---

1. — La courbe d'Archytas est une des rares courbes gauches algébriques qui aient été connues dans l'antiquité, peut-être même celle qui l'a été le plus anciennement. Elle a, comme on sait, été imaginée environ quatre cents ans avant l'ère chrétienne par le géomètre grec dont elle porte le nom pour résoudre le problème déliaque, autrement dit de la duplication du cube.

On peut la définir ainsi: ayant pris, sur l'axe Ox du trièdre trirectangle Oxy, le segment $OA = a$, on considère les cercles γ et γ_0 décrits sur OA comme diamètre respectivement dans les