SUR UNE LOI CORREGTIVE DE LA LOI DE NEWTON POUR LA DÉTERMINATION DU DÉPLACEMENT DU PÉRIHÉLIE ET DE LA DÉVIATION DES RAYONS LUMINEUX

Autor(en): **Tzénoff, M. I.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-24616

La différence des sommes (3) et (4) sera donc, pour

$$m > 2p \qquad \text{et} \qquad > \frac{2p^2}{\varepsilon} \sqrt[p]{\frac{2}{\varepsilon}},$$

moindre que

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon \binom{m}{k} x^k (1 - x)^{m-k} = \varepsilon ,$$

d'où on tire qu'elle tend uniformément vers zéro.

SUR UNE LOI CORRECTIVE DE LA LOI DE NEWTON POUR LA DÉTERMINATION DU DÉPLACEMENT DU PÉRIHÉLIE ET DE LA DÉVIATION DES RAYONS LUMINEUX [1]

PAR

M. I. TZÉNOFF (Sofia).

---

1. — Dans cet article nous nous posons le problème suivant: en prenant comme point de départ la seconde loi du mouvement de Newton (la variation de la quantité de mouvement est égale, en grandeur et en direction à la force appliquée au point matériel) déterminer le mouvement d'un point matériel de masse variable m, attiré suivant la loi de Newton par un centre fixe de masse M (par exemple le Soleil), en supposant que la masse variable m ne dépend que de la distance r du point au centre et que, pendant toute la durée du mouvement, l'intégrale de la force vive existe. La demi-force vive ou l'énergie cinétique du point est donnée par la formule $mc^2 - m_0c^2$ (valable pour les petites et pour les grandes

[1] A propos de l'article de M. G. MANEFF, « Considération substantielle de la Gravitation », imprimé dans les *Annales de l'Université de Sofia*, 1930-31.

vitesses), c désignant la vitesse de la lumière et m_0 ayant la signification habituelle en Mécanique classique. En partant des équations différentielles du mouvement nous nous proposons de déduire quelle doit être la loi corrective de la loi de Newton (à masse constante), la force corrective étant toujours une force centrale. Nous calculerons ensuite le déplacement du périhélie d'une planète et la déviation d'un rayon lumineux passant au voisinage du Soleil.

2. — Désignons par x', y' z' les dérivées par rapport à t des coordonnées x, y, z du point m. La valeur algébrique de la force F, agissant sur le point m, est

$$\mathrm{F} = -\frac{\varkappa \mathrm{M} m}{r^2},$$

k et M étant constants. En posant $k\mathrm{M} = \mu$, nous avons

$$\mathrm{F} = -\frac{\mu m}{r^2}.$$

Les équations différentielles du mouvement sont:

$$\frac{d(mx')}{dt} = -\frac{\mu m}{r^2}\frac{x}{r}, \quad \frac{d(my')}{dt} = -\frac{\mu m}{r^2}\frac{y}{r}, \quad \frac{d(mz')}{dt} = -\frac{\mu m}{r^2}\frac{z}{r}.$$

Des deux premières équations, on tire

$$x\frac{d}{dt}(my') - y\frac{d}{dt}(mx') = 0,$$

ou bien,

$$\frac{d}{dt}m(xy' - yx') - my'x' + mx'y' = 0.$$

Par conséquent, nous obtenons les trois intégrales premières

$$m(xy' - yx') = \mathrm{C}, \quad m(yz' - zy') = \mathrm{A}, \quad m(zx' - xz') = \mathrm{B},$$

d'où l'on déduit que le mouvement s'effectue dans le plan $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0$ passant par le centre fixe M.

En prenant ce plan pour le plan xoy, nous avons les équations:

$$\frac{d}{dt}(mx') = -\frac{\mu m}{r^2}\frac{x}{r}, \quad \frac{d}{dt}(my') = -\frac{\mu m}{r^2}\frac{y}{r}, \tag{1}$$

d'où l'on déduit l'intégrale première du mouvement:

$$m(xy' - yx') = \text{const.} \quad \text{ou bien} \quad mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}\,, \tag{2}$$

r et θ désignant les coordonnées polaires du point m.

Les équations (1) contiennent les trois inconnues x, y, m. Pour déterminer m nous nous servirons de notre hypothèse que l'intégrale de la force vive existe pour notre masse variable, c'est-à-dire que la somme de son énergie cinétique ($mc^2 - m_0c^2$) et du potentiel $V = -U$ (U étant la fonction de forces) demeure constante.

Comme la force est centrale, nous avons

$$dV = -dU = F dr = \frac{\mu m}{r^2} dr\,,$$

d'où l'on déduit:

$$V = \int \frac{\mu m dr}{r^2} + \text{const.}$$

Alors l'intégrale de la force vive sera

$$mc^2 + \int \frac{\mu m dr}{r^2} = \text{const.}\,; \tag{3}$$

en dérivant par rapport à r, on obtient

$$\frac{c^2 dm}{dr} + \frac{\mu m}{r^2} = 0\,,$$

ou bien

$$\frac{dm}{m} = -\frac{\mu dr}{c^2 r^2}\,. \tag{4}$$

En intégrant nous obtenons $m = Ae^{\frac{\mu}{c^2 r}}$ (A constante d'intégration).

Pour les mouvements planétaires

$$A = m_0 e^{-\frac{\mu}{c^2 r_0}}\,,$$

en supposant que pour $r = r_0$, $m = m_0$; alors

$$m = m_0 e^{\frac{\mu}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}\,. \tag{5}$$

Pour un rayon lumineux, en supposant que, pour $r = \infty$, $m = m_0$, on obtient

$$m = m_0 e^{\frac{\mu}{c^2 r}} . \tag{6}$$

Après la détermination de l'inconnue m, les deux équations (1) donnent x et y. Nous avons déjà trouvé l'intégrale première (2); nous montrerons qu'il existe encore une intégrale première simple. En effet, en multipliant les équations (1) par x', y', et additionnant, on obtient

$$v^2 dm + m v dv = -\frac{\mu m}{r^2} dr ,$$

ou bien, en tenant compte de (4),

$$\frac{v dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{\mu}{r^2} dr ;$$

d'où l'on déduit l'intégrale cherchée:

$$e^{\frac{\mu}{c^2 r}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \text{const.} = \mathrm{D} .$$

Pour les mouvements planétaires

$$\mathrm{D} = e^{\frac{\mu}{c^2 r_0}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} .$$

en supposant que, pour $r = r_0$, $v = v_0$; par conséquent

$$e^{\frac{2\mu}{c^2 r}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \mathrm{D}^2 = e^{\frac{2\mu}{c^2 r_0}} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) . \tag{7'}$$

Pour un rayon lumineux

$$\mathrm{D} = 0 ,$$

(puisque pour $r = \infty$, $v = c$); par conséquent, l'équation (7′) donne

$$v = c , \tag{8}$$

ce qui montre qu'avec nos hypothèses la vitesse du rayon lumineux demeure constante dans le champ de gravitation considéré.

Nous montrerons maintenant que les équations (7′), resp. (8), ne sont autre chose que l'intégrale de la force vive (3).

En effet, pour une planète on a

$$V = \int \frac{\mu m\, dr}{r^2} = \mu m_0 \int e^{\frac{\mu}{c^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)} \frac{dr}{r^2} = -\, c^2 m_0\, e^{\frac{\mu}{c^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)} = -\, c^2 m\ ;$$

pour un rayon lumineux, on a

$$V = -\, c^2 m_0 e^{\frac{\mu}{c^2 r}} = -\, c^2 m\ .$$

L'équation (7), pour les mouvements planétaires, donne

$$e^{\frac{\mu}{c^2 r}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = e^{\frac{\mu}{c^2 r_0}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}\ ;$$

on en déduit, d'après (5), que

$$m = m_0 e^{\frac{\mu}{c^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)} = m_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ .$$

Dans les calculs nous remplacerons m par la seconde ou par la première valeur ci-dessus, suivant qu'il s'agit de l'énergie cinétique (qui dépend de la vitesse) ou de la fonction potentielle (qui dépend de la position, c'est-à-dire de r).

Cela posé, l'équation (3) devient, pour une planète,

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, c^2 - c^2 e^{\frac{\mu}{c^2 r}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)} = \text{const.} = 0\ ,$$

puisque, pour $r = r_0$, $v = v_0$. On voit immédiatement que cette équation se ramène à l'équation (7).

Pour un rayon lumineux, comme $v = c$, on a pour l'énergie cinétique

$$mv^2 - m_0 c^2\ ;$$

comme le potentiel est égal à $-c^2 m$, l'équation (3) donne

$$mv^2 - mc^2 = \text{const.} = 0\ ,$$

puisque, pour $r = \infty$, $v = c$, $m = m_0$. On en déduit que $v = c$, ce qui est l'équation (8).

En résumé, le mouvement des planètes est déterminé par les deux intégrales premières du mouvement:

$$\left\{\begin{aligned} & e^{\frac{2\mu}{c^2 r}}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = D^2 \qquad \text{ou bien} \qquad e^{\frac{2\mu}{c^2 r}}(c^2 - v^2) = c^2 D^2\ , \\ & e^{\frac{\mu}{c^2 r}} r^2 \frac{d\theta}{dt} = B\ . \end{aligned}\right. \tag{9}$$

la trajectoire du rayon lumineux par:

$$\left\{\begin{aligned} & v^2 = c^2 \\ & e^{\frac{\mu}{c^2 r}} r^2 \frac{d\theta}{dt} = B\ . \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Bref, dans les mouvements d'une masse variable sous l'action de la force centrale considérée, on a toujours deux intégrales premières, comme dans le cas d'une masse *constante* mais l'intégrale des aires n'existe pas — elle est remplacée par l'équation

$$e^{\frac{\mu}{c^2 r}} r^2 \frac{d\theta}{dt} = B\ . \tag{2'}$$

La solution des équations (9) et (10) nous donnera le déplacement du périhélie et la déviation du rayon lumineux, dans l'hypothèse que la masse du mobile est variable; par conséquent les résultats obtenus ne doivent pas être comparés avec ceux obtenus en supposant la masse *constante*.

Nous chercherons maintenant les transformations que l'on devrait effectuer sur les équations (9) et (10), pour pouvoir considérer la masse comme constante et pour rendre possible la comparaison de nos équations avec les équations connues, établies dans l'hypothèse d'une masse constante. De la solution de cette question dépendra la détermination de la loi corrective de la loi de Newton, en supposant toujours que la force est une force centrale.

On sait que sous l'action d'une force centrale, un point de masse *constante* décrit une trajectoire plane suivant la loi des aires:

$$r^2 \frac{d\alpha}{dt} = \mathrm{B} .$$

Pour que notre équation (2′) eût cette forme simple, on pourrait effectuer l'une des deux transformations simples:

$$e^{\frac{\mu}{c^2 r}} r^2 = \rho^2 ,$$

ou bien

$$e^{\frac{\mu}{c^2 r}} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} . \qquad (11)$$

La première transformation est une homothétie qui a pour effet d'allonger un peu le rayon-vecteur; mais comme la masse varie avec la distance, l'équation $e^{\frac{\mu}{c^2 r}} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{B}$ ne deviendra pas $\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{B}$, mais prendra la forme

$$e^{\frac{\mu}{c^2 \rho}} \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{B} ,$$

puisque à la distance ρ la masse sera $m_0 e^{\frac{\mu}{c^2 \rho}}$.

Au contraire, en faisant la transformation (11), c'est-à-dire en laissant fixe la longueur du rayon-vecteur et ne changeant que sa direction, on obtiendra $r^2 \frac{d\alpha}{dt} = \mathrm{B}$, puisque la masse ne change pas dans cette transformation. Autrement dit, les transformations possibles sont celles pour lesquelles le rayon r ne change pas.

En faisant dans les équations (9) et (10) la transformation (11), on obtiendra deux équations dont la seconde coïncidera avec la loi des aires pour une masse constante, tandis que la première nous permettra de déduire la loi de force corrective cherchée.

Pour les mouvements planétaires nous obtenons, en partant des équations (9):

$$\left\{\begin{aligned} & e^{\frac{2\mu}{c^2 r}}\left[c^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = D^2 c^2 \\ & e^{\frac{\mu}{c^2 r}} r^2 \frac{d\theta}{dt} = B \ , \end{aligned}\right.$$

et remplaçant $e^{\frac{\mu}{c^2 r}}\theta'$ par α' les équations: [1]

$$\left\{\begin{aligned} & e^{\frac{2\mu}{c^2 r}}\left[c^2 - r'^2 - r^2 e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}} \alpha'^2\right] = D^2 c^2 \\ & r^2\alpha' = B \ , \end{aligned}\right. \tag{12}$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned} & r'^2 + r^2\alpha'^2 = c^2 + r^2\alpha'^2\left(1 - e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}}\right) - c^2 D^2 e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}} \\ & r^2\alpha' = B \ . \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Pour trouver la loi corrective cherchée, nous allons introduire les coordonnées rectangulaires x, y. On a

$$x = r\cos\alpha \ , \qquad y = r\sin\alpha$$

$$x' = r'\cos\alpha - r\sin\alpha\,\alpha' \ , \ y' = r'\sin\alpha + r\cos\alpha\,\alpha'$$

$$x'' = (r'' - r\alpha'^2)\cos\alpha - (r\alpha'' + 2r'\alpha')\sin\alpha \ , \ y'' = \ldots$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned} & x'' = (r'' - r\alpha'^2)\frac{x}{r} \ , \\ & y'' = (r'' - r\alpha'^2)\frac{y}{r} \ , \end{aligned}\right. \tag{13}$$

puisque $r\alpha'' + 2r'\alpha' = 0$ étant la dérivée de $r^2\alpha'$ qui est $= B$.

En dérivant la première équation (12) et remplaçant $r\alpha''$ par $-2r'\alpha'$, on obtient

$$-\frac{\mu}{r^2}r' - r'r'' + \frac{\mu}{c^2 r^2}r'^3 + rr'\alpha'^2 e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}} = 0 \ ,$$

[1] Nous désignerons, pour abréger, les dérivées par rapport à t par des accents.

d'où l'on déduit:

$$r'' - r\alpha'^2 = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{\mu}{c^2 r^2} r'^2 - r\alpha'^2 \left(1 - e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}}\right) .$$

En portant cette valeur dans les équations (13) on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} x'' &= -\left[\frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu . r'^2}{c^2 r^2} + r\alpha'^2 \left(1 - e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}}\right)\right] \frac{x}{r} , \\ y'' &= -\left[\frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu . r'^2}{c^2 r^2} + r\alpha'^2 \left(1 - e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}}\right)\right] \frac{y}{r} . \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, nous obtenons pour la valeur algébrique de la force

$$\mathrm{F} = -\left[\frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu . r'^2}{c^2 r^2} + r\alpha'^2 \left(1 - e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}}\right)\right] .$$

En développant la fonction exponentielle et en négligeant les termes en c^{-4}, ... on a

$$\mathrm{F} = -\left[\frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu\, r'^2}{c^2 r^2} + \alpha' \frac{2\mu}{c^2 r}\right] ,$$

ou bien, puisque $r^2 \alpha'^2 = \rho^2 - r'^2$,

$$\mathrm{F} = -\frac{\mu}{r^2}\left(1 + \frac{2\rho^2 - 3r'^2}{c^2}\right) .$$

C'est la loi de force centrale, données en Electrodynamique par Gauss. J. Bertrand (*Leçons sur la théorie mathématique de l'Electricité*, Paris, 1890, p. 183) et Tisserand (*Comptes rendus*, t. 110, 1890, p. 313) ont trouvé que la loi de Gauss donne pour l'avance du périhélie $\frac{4\pi\mu}{c^2 a\,(1 - e^2)}$, c'est-à-dire les deux tiers de la valeur trouvée par Einstein.

Pour un rayon lumineux, les équations (10) donnent

$$\left\{ \begin{aligned} & r'^2 + r^2\theta'^2 = c^2 , \\ & e^{\frac{\mu}{c^2 r}} r^2 \theta' = \mathrm{B} . \end{aligned} \right.$$

En effectuant la transformation (11), nous aurons

$$r'^2 + r^2\alpha'^2 e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}} = c^2 , \qquad r^2\alpha' = \mathrm{B} . \tag{14}$$

ou bien

$$\left\{\begin{array}{l} r'^2 + r^2\alpha'^2 = c^2 + r^2\alpha'^2\left(1 - e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}}\right) , \\ r^2\alpha' = \mathrm{B} . \end{array}\right. \tag{14'}$$

En suivant une marche analogue à celle suivie plus haut, on obtient

$$r'' - r\alpha'^2 = -\frac{\mu}{c^2}\alpha'^2 e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}} - r\alpha'^2\left(1 - e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}}\right)$$

$$= -\left[\frac{\mu}{c^2} e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}} + r\left(1 - e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}}\right)\right]\frac{\rho^2 - r'^2}{r^2} .$$

Par conséquent

$$\mathrm{F} = -\left[\frac{\mu}{c^2} e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}} + r\left(1 - e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}}\right)\right]\frac{\rho^2 - r'^2}{r^2} .$$

ou bien approximativement (en négligeant les termes en c^{-4}, ...)

$$\mathrm{F} = -\frac{3\mu}{c^2 r^2}(\rho^2 - r'^2) .$$

Pour déterminer la grandeur de la déviation, nous éliminerons α' entre les équations (14); on obtient

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{c^2}{\mathrm{B}^2} - \frac{1}{r^2} e^{-\frac{2\mu}{c^2 r}} = \frac{c^2}{\mathrm{B}^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2\mu}{c^2}\frac{1}{r^3} + \dots ,$$

les termes négligés contenant c^{-4} en facteur.

On arrive donc à la même équation que donne la Relativité [1] et qui donne 1″74 pour la déviation du rayon lumineux.

3. — Nous allons maintenant abandonner l'hypothèse que le centre attirant S (le Soleil) est immobile; nous arrivons donc au problème des deux corps. En désignant par α, β, γ et x_1, y_1, z_1

[1] Chazy, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. I, p. 238.

les coordonnées des points S et P resp., par M et m leurs masses *variables*, la grandeur de la force attractive est $\frac{\varkappa Mm}{r^2}$ et les équations du mouvement du Soleil et de la planète sont resp.:

$$\frac{d(M\alpha')}{dt} = \varkappa Mm \frac{x_1 - \alpha}{r^3}, \ldots \tag{S}$$

$$\frac{d(mx_1')}{dt} = \varkappa Mm \frac{\alpha - x_1}{r^3}, \ldots \tag{R}$$

ou bien

$$\frac{d\alpha'}{dt} + \frac{\alpha'}{M}\frac{dM}{dt} = \varkappa m \frac{x_1 - \alpha}{r^3}, \ldots \tag{S}$$

$$\frac{dx'}{dt} + \frac{x_1}{m}\frac{dm}{dt} = \varkappa M \frac{\alpha - x_1}{r^3}, \ldots \tag{P}$$

Pour déterminer le mouvement relatif du point P par rapport à S, nous transporterons les axes en S sans changer leurs directions; les coordonnées de P par rapport à ces axes seront: $x = x_1 - \alpha$, $y = y_1 - \beta$, $z = z_1 - \gamma$. Les équations précédentes donnent, après soustraction,

$$\frac{dx'}{dt} + \frac{x_1'}{m}\frac{dm}{dt} - \frac{\alpha'}{M}\frac{dM}{dt} = -\varkappa(M + m)\frac{x}{r^3}, \ldots\ldots,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d(mx')}{dt} + \alpha'\left(\frac{dm}{dt} - \frac{m}{M}\frac{dM}{dt}\right) = -\frac{\varkappa(M + m)mx}{r^3}, \ldots\ldots \tag{15}$$

On sait que le Soleil attire les planètes, les comètes, en général tous les corps; de même les planètes attirent le Soleil, les autres planètes, leur satellites, etc. A chaque corps est attaché un certain coefficient d'attraction; soit μ le coefficient du Soleil, λ celui d'une planète. En désignant par r la distance entre le Soleil S et la planète P, la grandeur de l'attraction de la planète par le Soleil est égale à $\frac{m\mu}{r^2}$, celle du Soleil par la planète $\frac{M\lambda}{r^2}$. En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction nous avons $\frac{m\mu}{r^2} = \frac{M\lambda}{r^2}$ ou bien $\frac{M}{m} = \frac{\mu}{\lambda}$ = const. On en déduit que $\frac{dM}{M} = \frac{dm}{m}$, ce qui simplifie les équations (15):

$$\frac{d(mx')}{dt} = -\frac{\varkappa(M + m)m}{r^2}\frac{x}{r}, \ldots \tag{15'}$$

Ces équations montrent que le mouvement relatif de P par rapport à S coïncide avec le mouvement du point P attiré suivant la loi de Newton par un centre fixe de masse $M + m$:

$$F = -\varkappa \frac{(M + m)m}{r^2}.$$

Comme $\frac{M}{m} = \text{const} = \frac{M_0}{m_0}$, on a, en posant

$$\mu_1 = \varkappa M_0 \left(1 + \frac{m_0}{M_0}\right),$$

$$F = -\frac{\mu_1 m^2}{m_0 r^2}.$$

Pour déterminer la loi suivant laquelle varie la masse, nous suivrons une marche analogue à celle suivie plus haut.

On a

$$d(mc^2) = c^2 dm = -\frac{\mu_1 m^2}{m_0}\frac{dr}{r^2},$$

ou bien

$$\frac{dm}{m^2} = -\frac{\mu_1}{m_0 c^2}\frac{dr}{r^2},$$

d'où l'on déduit

$$m = \frac{m_0}{1 - \frac{\mu_1}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)},$$

expression qui ne diffère de

$$m = m_0 e^{\frac{\mu_1}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}.$$

que par des termes contenant c^4 en facteur. On voit donc, qu'avec le même degré d'approximation, on peut se servir de la formule (5) en remplaçant seulement k par $k\left(1 + \frac{m_0}{M_0}\right)$.

Des équations (15′) on déduit

$$v^2 dm + mv dv = -\frac{\varkappa(M + m)m}{r^2} dr = -\frac{\mu_1 m^2}{m_0}\frac{dr}{r^2}.$$

Comme $\frac{dm}{m^2} = -\frac{\mu_1}{m_0 c^2} \frac{dr}{r^2}$ on obtient successivement

$$\frac{1}{m} v dv = -\frac{\mu_1}{m_0 r^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dr \ ; \quad \frac{v dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{\mu_1}{r^2} \cdot \frac{dr}{1 - \frac{\mu_1}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \ ;$$

en intégrant, on a

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{\mu_1}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = \text{const.} = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \,,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{1 - \frac{\mu_1}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = m \,.$$

Toujours avec le même degré d'approximation, cette intégrale devient

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, e^{\frac{\mu_1}{c^2 r}} = \mathrm{D} \,,$$

et par conséquent coïncide avec (7) pourvu qu'on remplace μ par μ_1, c'est-à-dire k par $k\,(1 + \frac{m_0}{\mathrm{M}_0}\,)$.

En faisant les mêmes calculs on obtiendra pour l'avance du périhélie l'expression

$$\frac{4\pi\mu_1}{c^2 a(1 - e^2)} = \frac{4\pi\mu_0 \varkappa}{c^2 a(1 - e^2)} + \frac{4\pi m_0 \varkappa}{c^2 a(1 - e^2)}$$

dont le second terme est insignifiant en comparaison avec le premier. (Même remarque pour la déviation du rayon lumineux.)