I. Polaire d'un point par rapport a une droite ET UN CERCLE.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

SUR LA POLAIRE GÉNÉRALISÉE, ET SUR LA COURBE MOYENNE DE DEUX CERCLES

PAR

R. Harmegnies (Paris).

Le présent travail fait suite au mémoire de M. d'Ocagne « Sur la polaire généralisée ». M. d'Ocagne a bien voulu me proposer de chercher une solution géométrique pour quelques uns de ses résultats; c'est l'objet de la première partie. La deuxième partie est consacrée à une généralisation de l'un de ces résultats; elle aboutit à une propriété intéressante, et probablement nouvelle, de la courbe du trois-barres.

I. Polaire d'un point par rapport a une droite et un cercle.

1. — D'après la définition même de la polaire généralisée, la polaire du point O par rapport à une droite (M_2) et à une courbe quelconque (M_1) est une courbe (M) homologique de (M_1), O et (M_2) étant le pôle et l'axe d'homologie. Si donc, la conique (M) et le point O étant donnés, nous cherchons le cercle et la droite qui leur sont polairement associés, cela revient à chercher une homologie de pôle O qui transforme la conique en cercle. Désignons par I et J les points cycliques, par α et β, α' et β', les points d'intersection avec la conique des droites OI, OJ (nous supposons que le point O n'est pas sur la conique, ni sur la droite de l'infini); l'axe d'homologie sera évidemment homothétique par rapport à O, dans le rapport $\frac{1}{2}$, de l'une des droites, $\alpha\alpha'$, $\alpha'\beta$, $\beta\beta'$, $\beta'\alpha$.

Transformons maintenant la figure par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O; les points α, β, α', β', donnent les tangentes isotropes de la conique transformée; les droites

$\alpha\alpha'$, $\alpha'\beta$, $\beta\beta'$, $\beta'\alpha$, donnent les foyers de cette conique, dont deux sont toujours réels, et deux toujours imaginaires. *Une conique réelle donnée est donc, en général, doublement polaire d'un point réel quelconque de son plan par rapport à un cercle réel et une droite réelle associés à ce point* (Cf. d'Ocagne, n° 13).

Si le point O est sur la conique (M_1), on trouvera de même une solution unique, toujours réelle. Si le point O est à l'infini, on verra sans difficulté que la courbe doit être une ellipse, et que, si a et b désignent les demi-axes, on doit avoir $a > 2b$; la direction du point O est alors définie par $c \cos \omega = \pm \sqrt{a(a - 2b)}$ ($c^2 = a^2 - b^2$); à chacune des deux directions ainsi définies correspond une infinité simple d'axes d'homologie, tous parallèles.

2. — L'interprétation donnée ci-dessus permet de discuter facilement le cas où O décrit un axe de la conique (M_1). Deux des droites $\alpha\alpha'$, $\alpha'\beta$, $\beta\beta'$, $\beta'\alpha$, sont alors perpendiculaires à cet axe; nous pouvons toujours supposer que ce sont les droites $\alpha\alpha'$. $\beta\beta'$. La droite $\alpha\beta'$, par exemple, s'obtient alors en prenant les points d'intersection avec la conique des droites $\beta\alpha$ et $\beta\beta'$, qui ont toutes deux une direction fixe. L'enveloppe de $\alpha\beta'$ est donc une conique bitangente à (M_2) en ses points à l'infini; l'enveloppe de $\alpha'\beta$, symétrique par rapport à l'axe considéré, est la même conique; il suffit de placer O en l'une des extrémités de l'axe pour voir que cette extrémité est un foyer de la conique trouvée; si l'on place O en l'un des foyers porté par l'axe, on voit que la conique trouvée est tangente à la directrice correspondante.

En définitive, *l'enveloppe des cordes communes à une conique à centre* (M_2) *et à un cercle de rayon nul dont le centre décrit un axe de la conique, est une conique homothétique et concentrique à la conique donnée: elle admet pour foyers les sommets de* (M_2) *portés par l'axe considéré, et pour tangentes aux sommets les directrices de* (M_2) *perpendiculaires à cet axe.*

Le cas où la conique (M_2) est une parabole se traite sans difficulté et donne le résultat suivant: *l'enveloppe des cordes communes à une parabole* (M_2) *et à un cercle de rayon nul dont le centre décrit l'axe de la parabole, est une parabole qui se déduit de* (M_2) *par une translation équipollente à* $\overrightarrow{FS}$, F *et* S *étant le foyer et le sommet de* (M_2).

Remarquons enfin que les cordes $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$ se coupent au pied O′ de la polaire de O, sur l'axe considéré. Il en résulte immédiatement que, si (M_2) est une ellipse, ces cordes sont réelles ou imaginaires suivant que O′ est extérieur ou intérieur à l'ellipse enveloppe de $\alpha\beta'$, c'est-à-dire suivant que O est intérieur ou extérieur au segment qui joint les foyers; si (M_2) et une hyperbole, c'est l'inverse qui est vrai. Si (M_2) est une parabole, les cordes $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$ sont réelles quand O est porté par le segment qui joint F au point à l'infini de la parabole, à l'intérieur de celle-ci.

II. Courbe moyenne de deux cercles.

1. — M. d'Ocagne a montré (*loc. cit.*, nº 13) que l'inverse d'une conique (ou, ce qui revient au même, une podaire de conique) peut être définie, de deux manières, comme la courbe moyenne, par rapport à son point double, de deux cercles réels dont l'un passe par ce point double. Proposons-nous de chercher la courbe moyenne de deux cercles quelconques par rapport à un point quelconque O, non situé sur ces cercles.

Nous désignerons par C_1 et C_2 les centres des deux cercles, par A_1 et B_1, A_2 et B_2, les points où les deux cercles sont coupés par une sécante issue de O. Une telle sécante donne quatre points du lieu. D'autre part, O est évidemment point double, les tangentes en O étant les deux droites (en général distinctes) qui passent par les points communs à l'un des cercles et au symétrique de l'autre par rapport à O; une difficulté pourrait s'élever relativement aux droites isotropes issues de O, mais nous verrons plus bas que ces droites donnent en général des points de la courbe distincts de O; le cas d'exception se traiterait par passage à la limite. *La courbe est donc du sixième degré.* Elle a deux autres points doubles correspondant aux sécantes issues de O qui déterminent des cordes égales sur les deux cercles.

Les seuls points à l'infini possibles sont les points cycliques I et J. Cherchons à déterminer les tangentes en ces points. Une sécante issue de O, et voisine de OI, coupe les cercles en A_1 et A_2 (à distance finie, si O n'est pas le centre de l'un des cercles) et en