

FRONTS D'ONDES ET CORPUSCULES (A Propos du Problème d'Agrégation de 1929)

Autor(en): **Buhl, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-24610>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

FRONTS D'ONDES ET CORPUSCULES
(A PROPOS DU PROBLÈME D'AGRÉGATION DE 1929)

PAR

A. BUHL (Toulouse).

Le remarquable problème de Calcul différentiel et intégral, proposé à l'Agrégation en 1929 et dont M. Henri Milloux a donné ici-même (t. 29, 1930, p. 293) une solution élégante et détaillée, traite de questions que ni l'énoncé ni la solution en litige n'ont épuisées.

Il me semble intéressant de revenir sur ce problème en le rattachant à des considérations de Physique théorique. Les surfaces dont il s'agit donnent aisément des fronts d'ondes transportant de certaines invariances intégrales, ces fronts pouvant d'ailleurs s'émietter de manière à donner lieu à une propagation corpusculaire.

Au fond, il n'y a là rien que de très naturel. Les deux propagations sont de la nature même des Principes du Calcul intégral et c'est justement ce qui permet l'existence d'une Physique théorique pouvant être bâtie comme l'Analyse elle-même.

Pour l'examen de cas beaucoup plus généraux, on pourra se reporter à des Notes concernant la Géométrie ondulatoire et publiées aux *Comptes rendus* des 6, 27 octobre, 29 décembre 1930, 9 février et 27 avril 1931 ainsi qu'à un Mémoire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1932).

1. — Surfaces S telles que l'angle V , de la normale en M et du rayon vecteur OM , soit une fonction donnée de $OM = \rho$. — Pour ces surfaces S , on est immédiatement conduit à écrire

$$\cos V = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\rho} = F(\rho)$$

si α , β , γ sont cosinus directeurs pour la normale en M. Cette équation prend, de manière tout aussi immédiate, la forme en x , y , z , p , q

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \rho F(\rho), \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (1)$$

Une première remarque s'impose au sujet de l'équation (1). On sait qu'en général une équation en x , y , z , p , q ne permet guère d'en espérer une intégrale *générale* explicite; il faut déjà s'estimer heureux quand on peut atteindre l'intégrale *complète* ou intégrale dépendant de *deux* constantes arbitraires. Or l'équation (1) est très privilégiée; sans même s'inquiéter du système différentiel caractéristique, on peut aller jusqu'à l'intégrale générale. Ceci arrive même, de la manière la plus simple, en commençant par rechercher les surfaces S qui sont de révolution autour de Oz. Soit $z = z(r)$ l'équation de ces dernières surfaces, r étant la projection de ρ sur Oxy. Avec cette expression de z , l'équation (1) devient

$$\frac{z - rz'}{\sqrt{1 + z'^2}} = \frac{\rho^2 d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}} = \rho F(\rho)$$

si ω est l'angle de ρ et de r . Finalement on a l'équation différentielle

$$\frac{F}{\sqrt{1 - F^2}} \frac{d\rho}{\rho} = d\omega. \quad (2)$$

Cette équation (2) n'est autre que

$$\cotang V = \frac{\rho}{r}.$$

On aurait donc pu l'écrire immédiatement. Bref, la famille de courbes (2) est engendrée par une courbe quelconque du plan méridien zOr quand cette courbe, dans ce plan, tourne autour de O. Et si une courbe (2) tourne, dans l'espace, non autour de Oz mais autour d'un autre axe de son plan passant par O, il est clair, d'après la définition des surfaces S, qu'on a encore une de ces surfaces. Plus généralement, si le plan d'une courbe plane C quelconque roule sur un cône quelconque Γ , de sommet O, la surface de Monge ainsi engendrée sera une surface S. Et cette

surface S sera l'intégrale *générale* de (1) puisqu'elle dépendra du cône Γ qui, étant quelconque, correspondra à l'introduction, dans la question, d'une fonction arbitraire d'une variable.

D'après les propriétés générales des surfaces de Monge et le théorème de Joachimsthal, ces résultats pouvaient être prévus sans aucun calcul, mais les formules (1) et (2) sont utiles quant aux développements qui vont suivre.

Remarquons aussi que les surfaces S dépendant, dans leur ensemble, de deux fonctions arbitraires d'une variable, fonctions qui correspondent à la courbe C et au cône Γ , ces surfaces S correspondent aussi à une équation de Monge-Ampère qui se déduit de (1) sous la forme

$$(y + qz) \frac{\partial}{\partial x} \frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = (x + pz) \frac{\partial}{\partial y} \frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} . \quad (3)$$

Cette équation (3) admet alors (1) pour intégrale intermédiaire. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer les dérivations partielles indiquées en (3) mais l'intérêt n'est pas là. Il vaut mieux remarquer que $x + pz$ et $y + qz$ sont les coordonnées ξ et η du point où la normale en M perce le plan Oxy . Ceci permet de considérer l'opérateur

$$\Xi = \eta \frac{\partial}{\partial x} - \xi \frac{\partial}{\partial y}$$

et d'écrire que les surfaces S sont telles que l'on ait

$$\Xi(\rho \cos V) = 0 .$$

C'est là une forme condensée de l'équation (3), forme certainement plus intéressante qu'une forme développée.

2. — *Equations homogénéisées.* — Soit, par exemple, l'équation ordinaire d'une surface

$$\Phi(x, y, z) = 0 . \quad (4)$$

On peut toujours mettre cette équation sous la forme

$$f(x, y, z) = 1 \quad (5)$$

avec f fonction homogène d'ordre 1 et nous dirons alors que

l'équation (4) est *homogénéisée* en (5). La transformation se conçoit immédiatement; il suffit d'écrire (4)

$$\Phi\left(\frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = 0,$$

de résoudre par rapport à τ et de faire $\tau = 1$.

Imaginons maintenant que l'on veuille étudier les surfaces S en les supposant toujours représentées par des équations (5). On aura

$$-p = \frac{f_x}{f_z}, \quad -q = \frac{f_y}{f_z}$$

et l'équation (1), après application du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, deviendra

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \frac{f^2}{\rho^2} \left[F\left(\frac{\rho}{f}\right) \right]^{-2}. \quad (6)$$

Il est évident que, sur les surfaces $f = 1$, l'équation (6) a aussi bien lieu lorsqu'on fait $f = 1$ dans le second membre mais, quant à la recherche ou à l'étude de la fonction f , il faut obligatoirement prendre ce second membre sous la forme indiquée en (6), de manière à ce que les deux membres de l'équation aient même ordre d'homogénéité (zéro).

D'ailleurs, si l'on cherche pour (6) une solution f , homogène d'ordre un, on est conduit à poser, par exemple,

$$f = z\varphi(u, \nu), \quad u = \frac{y}{x}, \quad \nu = \frac{z}{x}$$

d'où

$$f_x = -\nu(u\varphi_u + \nu\varphi_\nu), \quad f_y = \nu\varphi_u, \quad f_z = \varphi + \nu\varphi_\nu$$

et l'équation (6) devient une équation aux dérivées partielles de φ contenant φ et les variables u, ν . On a remplacé l'équation (1) par une équation du même type. Mais ce n'est pas cette équation en $u, \nu, \varphi, \varphi_u, \varphi_\nu$ qui est intéressante. L'intérêt est dans (6), équation de Jacobi *homogénéisée* qui lie la question géométrique d'abord envisagée à la Mécanique classique et à la Mécanique ondulatoire.

3. — *Invariances intégrales.* — Soit un cône infiniment délié de sommet O, cône qui découpe $d\sigma$ sur une surface S et $d\sigma_1$ sur la sphère de centre O et de rayon a .

On peut toujours s'arranger à avoir

$$\psi(\rho) d\sigma = \psi(a) d\sigma_1$$

avec φ fonction donnée à l'avance. En effet, de cette équation et de

$$\frac{\cos V d\sigma}{\rho^2} = \frac{d\sigma_1}{a^2},$$

on conclut

$$\cos V = F(\rho) = \frac{\rho^2 \psi(\rho)}{a^2 \psi(a)}. \quad (7)$$

Quand F est déterminé de cette manière, on a

$$\int_S \int \psi(\rho) d\sigma = \psi(a) \sigma_1$$

pour toutes les cloisons S découpées, sur la famille S, par un cône quelconque de sommet O. L'aire σ_1 est découpée par le même cône sur la sphère de centre O et de rayon a .

4. — *Rôle des spirales sinusoïdes.* — Une des hypothèses les plus simples que l'on puisse faire sur la fonction ψ est de poser

$$\psi(\rho) = \rho^{n-2}.$$

Alors, d'après (7) et (2), on a immédiatement la famille de spirales sinusoïdes

$$\rho^n = a^n \sin n(\omega - C). \quad (8)$$

Il est particulièrement aisé d'attribuer à ces courbes une équation cartésienne homogénéisée ou d'en faire des méridiens de surfaces de révolution ayant une équation réductible au même type de façon explicite. Et l'équation (6) devient, d'après (7),

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = a^{2n} \left(\frac{f}{\rho}\right)^{2n+2}.$$

Cette équation homogénéisée est destinée à déterminer des

surfaces, d'équation $f = 1$, sur lesquelles on aura évidemment

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \frac{a^{2n}}{\rho^{2n+2}}. \quad (9)$$

5. — *Considérations physiques.* — L'équation de Jacobi

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] + U(x, y, z) = E, \quad (10)$$

où, pour l'introduction du temps,

$$V = S - Et, \quad (11)$$

est manifestement identifiable avec (9). On a

$$2m(E - U) = \frac{a^{2n}}{\rho^{2n+2}}$$

et, E représentant l'énergie totale qui est constante,

$$m \frac{\partial U}{\partial \rho} = (n + 1) \frac{a^{2n}}{\rho^{2n+3}}. \quad (12)$$

Soit $n + 1$ positif. Alors, à une force centrale attractive et inversement proportionnelle à la puissance $(2n + 3)$ de la distance, correspondent les surfaces de Monge S engendrées par les spirales sinusoides

$$\rho^n = a^n \sin n(\omega - C) \quad (8)$$

dont le plan roule sur un cône quelconque Γ ayant son sommet au pôle O de la spirale. Sur les surfaces S, un autre cône quelconque Γ_1 , de sommet O, à directrice fermée, intercepte des cloisons pour lesquelles

$$\int_S \rho^{n-2} d\sigma = a^{n-2} \sigma_1, \quad (13)$$

si a est le rayon d'une sphère de centre O sur laquelle Γ_1 intercepte l'aire σ_1 .

Cependant que, conformément à la théorie jacobienne, on fait intervenir les deux équations (10) et (11) pour que le mouvement du point matériel, de masse m , ait lieu, on peut associer à (10) la même équation (10) homogénéisée pour obtenir ici des surfaces S indéterminées de par l'indétermination du cône Γ et susceptibles, de par cette indétermination, de donner des cloisons ayant, dans

tous les cônes Γ_1 , divers modes de propagation, modes qui cependant conservent tous, pour une cloison en propagation, une intégrale (13) attachée à cette cloison.

Soit, par exemple, $2n + 3 = 2$, ce qui, d'après (12), donne le cas de l'attraction newtonienne. Les spirales sinusoides (8) auront l'équation

$$\rho \sin^2 \frac{C - \omega}{2} = a .$$

Ce sont des paraboles dont le foyer est en O et dont le paramètre est $2a$; lorsque C varie, elles tournent dans leur plan, autour de O, restant tangentes au cercle de centre O et de rayon a . Sur les surfaces de Monge S issues de ces paraboles, tout cône Γ_1 découpe un ensemble de cloisons pour chacune desquelles on a

$$\int_S \int \rho^{-\frac{5}{2}} d\tau = a^{-\frac{5}{2}} \sigma_1 .$$

Comme second exemple, supposons que nous voulions simplement que ce soient des *aires* qui se propagent. Alors, d'après (13), il faut prendre $n = 2$ et, d'après (12), ce mode de propagation correspond à une attraction en raison inverse de la septième puissance de la distance. Les courbes (8) sont des lemniscates de Bernoulli.

Revenons aux généralités. Au lieu d'imaginer une propagation à invariance intégrale dans un seul cône Γ_1 , on peut imaginer un faisceau d'un très grand nombre de cônes Γ_1 , chaque cône étant aussi délié qu'on voudra. Les cloisons en propagation n'ont nullement besoin, pour conserver leurs propriétés intégrales, d'être raccordées quand on passe d'un cône au cône voisin. La propagation devient *corpusculaire*.

Une équation (10) peut provenir aussi de l'équation de la théorie ondulatoire

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 , \quad (14)$$

équation qui exprime que V se propage sur des fronts d'onde en y conservant une valeur V_0 . L'identification de (10) et de (14), en tenant compte de (11), donne

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - U)}}$$

et c'est là le premier lien de la Mécanique ondulatoire avec la Mécanique classique. Pour plus de développements sur ce points, on peut se reporter à l'ouvrage, de M. Eugène Bloch, *L'ancienne et la nouvelle Théorie des Quanta*, 1930, p. 267.

Mais, que l'on parte de (10) ou de (14), il est certain que la substitution (11) donne une équation semblant ne plus contenir le temps. Cependant, à une telle équation homogénéisée, correspondent des surfaces variables $f = 1$, transportant des intégrales invariantes et encore assimilables à des fronts d'onde, parce qu' t est d'une constitution arbitraire permettant d'y introduire le temps et ce, d'ailleurs, d'une infinité de manières.

6. — *Espaces à canaux.* — Dans cet article, nous n'avons pas voulu nous écarter de l'énoncé au problème proposé à l'Agrégation. Mais nous pouvons apercevoir maintenant, l'existence générale de certains *espaces à canaux* (à canaux incurvés de façon quelconque) dans lesquels se propagent transversalement des cloisons pouvant transporter des invariances intégrales quelconques. Comme nous l'avons dit, au début, ces transports peuvent être effectués soit par des cloisons continues, qui prennent alors la physionomie de fronts d'ondes, soit par des cloisons se fragmentant de canal à canal contigu. La propagation peut alors devenir corpusculaire et présenter des modalités dont on ne peut, au premier abord, limiter la complexité ou les indéterminations. Le continu cède le pas à un discontinu dont l'analyse est beaucoup plus vaste; c'est là que les conceptions d'un René Baire peuvent être reprises sous couleur indéniablement physique et voisiner avec celles d'un Louis de Broglie.

Pour plus de détails, on pourra se reporter, outre les références déjà données, à deux fascicules publiés, l'un dans le *Mémorial des Sciences mathématiques* sous le titre *Gravifiques, Groupes, Mécaniques*, l'autre, dans le *Mémorial des Sciences physiques*, sous le titre *Structure analytique et Théories physiques*. Mais ces exposés eux-mêmes ne constituent que de minimes travaux d'approche quant à un sujet fondamental de Physique théorique dont les développements pourront être indéfiniment poursuivis.