

II. Invariants et opérateurs différentiels d'une forme de Pfaff.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Dans le cas où l'on considère deux vecteurs \mathbf{a} et $\mathbf{b} = \mathbf{J}\mathbf{a}$ d'un *simili-repère*, on a d'ailleurs (les rotationnels étant *superficiels*)

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b} \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = -\operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad (15)$$

et pour un gradient ∇f on a toujours la condition d'intégrabilité

$$\operatorname{rot} \nabla f = 0. \quad (16)$$

On connaît d'autre part (*Thèse*) les relations entre les notations vectorielles: produit extérieur de vecteurs, rotationnel — et celles introduites par M. E. Cartan pour les formes de Pfaff: produit extérieur, différentiation extérieure; elles tiennent essentiellement aux formules

$$\left\{ \begin{array}{l} df = \nabla f \times d\mathbf{m} \\ \varpi = \mathbf{a} \times d\mathbf{m} = xdf \quad \mathbf{a} = x\nabla f. \end{array} \right. \quad (17)$$

Aux formules (11) correspond, en calcul vectoriel

$$\nabla g = q\mathbf{J}\nabla f \quad (11')$$

et (12) s'en déduit en prenant les rotationnels des deux membres.

II. INVARIANTS ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS D'UNE FORME DE PFAFF.

4. Nous dirons que les courbes intégrales d'une équation de Pfaff $\varpi = 0$ forment sur la surface un faisceau (simple); la donnée d'une fonction f de u, v (ou de la variable géométrique \mathbf{m}) est équivalente à celle des intégrales $f = \text{const.}$, prises *individuellement*, de l'équation $df = 0$; au contraire, la donnée d'une équation de Pfaff $\varpi = xdf = 0$, revient seulement à celle de *l'ensemble* des courbes intégrales du faisceau.

Soit à conserver, par les transformations conformes (3), une forme de Pfaff

$$\varpi = A(u, v) du + B(u, v) dv \quad (18)$$

à laquelle nous avons attaché deux opérateurs différentiels du 1^{er} ordre, \mathfrak{S}_u et \mathfrak{S}_v , donnant d'une fonction z les paramètres différentiels

$$\mathfrak{S}_u z = \frac{z_u}{A} \quad \mathfrak{S}_v z = \frac{z_v}{B}. \quad (19)$$

Nous avons montré l'existence, pour ces transformations conformes, de deux invariants *essentiels* d'ordre deux ¹

$$\alpha = \frac{B_u}{AB} = \frac{1}{A} (\log B)_u = \mathfrak{S}_u \log B \quad \beta = \frac{A_v}{AB} = \frac{1}{B} (\log A)_v = \mathfrak{S}_v \log A \quad (20)$$

à partir desquels les invariants d'ordre supérieur se forment par le jeu des opérateurs différentiels \mathfrak{S}_u et \mathfrak{S}_v ; l'itération de ceux-ci fournit des opérateurs d'ordre supérieur ou des combinaisons linéaires, à coefficients invariants, des opérateurs précédents; nous avons posé

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v) = \mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v - \mathfrak{S}_v \mathfrak{S}_u = \beta \mathfrak{S}_u - \alpha \mathfrak{S}_v \\ \mathfrak{S}_{uv} = \frac{1}{2} (\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v + \mathfrak{S}_v \mathfrak{S}_u + \beta \mathfrak{S}_u + \alpha \mathfrak{S}_v) \end{array} \right. \quad (21)$$

l'opérateur linéaire du 2^e ordre, \mathfrak{S}_{uv} , donnant pour une fonction z

$$\mathfrak{S}_{uv} z = \frac{z_{uv}}{AB} . \quad (21')$$

Les opérateurs \mathfrak{S}_u et \mathfrak{S}_v étaient des symboles de transformations infinitésimales agissant respectivement le long des lignes minima $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$; nous leur substituerons des symboles de transformations agissant le long des lignes du faisceau $\varpi = 0$ et de leurs trajectoires orthogonales, en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} = \frac{1}{2} (\mathfrak{S}_u + \mathfrak{S}_v) \\ \mathcal{T} = \frac{i}{2} (\mathfrak{S}_u - \mathfrak{S}_v) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}_u = \mathcal{D} - i\mathcal{T} \\ \mathfrak{S}_v = \mathcal{D} + i\mathcal{T} \end{array} \right. . \quad (22)$$

Nous prendrons aussi pour invariants essentiels du second ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \\ T = \frac{i}{2} (\alpha - \beta) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = D - iT \\ \beta = D + iT \end{array} \right. . \quad (23)$$

¹ Contrairement à ce que nous avons fait précédemment (*Equivalences*), l'ordre attribué aux invariants d'une forme ou équation différentielle du 1^{er} ordre est l'ordre de dérivation, *augmenté d'une unité*; cette modification s'impose ici où nous avons parfois à considérer les invariants de formes finies (d'ordre zéro).

5. Aux formules (21) correspondent

$$\begin{cases} (\mathcal{O}\mathcal{C}) = \mathcal{O}\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{O} = \mathcal{T}\mathcal{O} - \mathcal{D}\mathcal{C} \\ \mathcal{L} = \mathcal{O}^2 + \mathcal{C}^2 + \mathcal{D}\mathcal{O} + \mathcal{T}\mathcal{C} \end{cases} \quad (24)$$

avec

$$(\mathcal{O}\mathcal{C}) = -\frac{i}{2}(\mathfrak{S}_u\mathfrak{S}_v) \quad \mathcal{L} = \mathfrak{S}_{uv}; \quad (24')$$

mais nous introduirons trois opérateurs distincts du 2^e ordre, \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{N} et un quatrième opérateur \mathcal{O} identiquement nul, avec les relations

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{O}^2 + \mathcal{C}^2 + \mathcal{D}\mathcal{O} + \mathcal{T}\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_u\mathfrak{S}_v + \mathfrak{S}_v\mathfrak{S}_u + \beta\mathfrak{S}_u + \alpha\mathfrak{S}_v) \\ \mathcal{M} &= \mathcal{O}^2 - \mathcal{C}^2 + \mathcal{D}\mathcal{O} - \mathcal{T}\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_u^2 + \mathfrak{S}_v^2 + \alpha\mathfrak{S}_u + \beta\mathfrak{S}_v) \\ \mathcal{N} &= \mathcal{O}\mathcal{C} + \mathcal{C}\mathcal{O} + \mathcal{T}\mathcal{O} + \mathcal{D}\mathcal{C} = \frac{i}{2}(\mathfrak{S}_u^2 - \mathfrak{S}_v^2 + \alpha\mathfrak{S}_u - \beta\mathfrak{S}_v) \\ \mathcal{O} &= \mathcal{O}\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{O} - \mathcal{T}\mathcal{O} + \mathcal{D}\mathcal{C} = -\frac{i}{2}(\mathfrak{S}_u\mathfrak{S}_v - \mathfrak{S}_v\mathfrak{S}_u - \beta\mathfrak{S}_u + \alpha\mathfrak{S}_v) = 0. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

En posant, pour le produit et le quotient des coefficients de la forme ω

$$P = AB \quad Q = \frac{A}{B} \quad (26)$$

les invariants du 2^e ordre s'expriment maintenant par

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{2}(\mathcal{O} \log P + i\mathcal{C} \log Q) \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{2}(\mathcal{C} \log P - i\mathcal{O} \log Q). \end{aligned} \right. \quad (27)$$

Les quatre invariants distincts du 3^e ordre précédemment introduits (et désignés alors par $\omega = \mathfrak{S}_u\alpha$, $\theta = \mathfrak{S}_u\beta$, $\varphi = \mathfrak{S}_v\alpha$, $\psi = \mathfrak{S}_v\beta$) s'expriment par

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_u\alpha &= \mathcal{O}\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{T} - i(\mathcal{O}\mathcal{T} + \mathcal{C}\mathcal{D}) & \mathfrak{S}_u\beta &= \mathcal{O}\mathcal{D} + \mathcal{C}\mathcal{T} + i(\mathcal{O}\mathcal{T} - \mathcal{C}\mathcal{D}) \\ \mathfrak{S}_v\alpha &= \mathcal{O}\mathcal{D} + \mathcal{C}\mathcal{T} - i(\mathcal{O}\mathcal{T} - \mathcal{C}\mathcal{D}) & \mathfrak{S}_v\beta &= \mathcal{O}\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{T} + i(\mathcal{O}\mathcal{T} + \mathcal{C}\mathcal{D}) \end{aligned} \right. \quad (28)$$

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{O}\mathcal{D} &= \frac{1}{4}(\mathfrak{S}_u\beta + \mathfrak{S}_v\alpha + \mathfrak{S}_u\alpha + \mathfrak{S}_v\beta) & \mathcal{O}\mathcal{T} &= -\frac{i}{4}(\mathfrak{S}_u\beta - \mathfrak{S}_v\alpha - \mathfrak{S}_u\alpha + \mathfrak{S}_v\beta) \\ \mathcal{C}\mathcal{D} &= \frac{i}{4}(\mathfrak{S}_u\beta - \mathfrak{S}_v\alpha + \mathfrak{S}_u\alpha - \mathfrak{S}_v\beta) & \mathcal{C}\mathcal{T} &= \frac{1}{4}(\mathfrak{S}_u\beta + \mathfrak{S}_v\alpha - \mathfrak{S}_u\alpha - \mathfrak{S}_v\beta) \end{aligned} \right. \quad (28')$$

dont les combinaisons les plus utiles sont

$$\left\{ \begin{aligned} -I &= \mathcal{O}T - \mathfrak{S}D = -\frac{i}{2}(\mathfrak{S}_u\beta - \mathfrak{S}_v\alpha) \\ -k &= \mathcal{O}D + \mathfrak{S}T + D^2 + T^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_u\beta + \mathfrak{S}_v\alpha + 2\alpha\beta) \\ -h &= \mathcal{O}D - \mathfrak{S}T + D^2 - T^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_u\alpha + \mathfrak{S}_v\beta + \alpha^2 + \beta^2) \\ -j &= \mathcal{O}T + \mathfrak{S}D + 2DT = \frac{i}{2}(\mathfrak{S}_u\alpha - \mathfrak{S}_v\beta + \alpha^2 - \beta^2) \end{aligned} \right. \quad (29)$$

soit, en fonction de P et Q et des opérateurs \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{N}

$$\left\{ \begin{aligned} -I &= -\frac{i}{2}\mathcal{L}^2 \log Q \\ -k &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^2 \log P \\ -h &= \frac{1}{2}(\mathcal{M} \log P + i\mathcal{N} \log Q) \\ -j &= \frac{1}{2}(\mathcal{N} \log P - i\mathcal{M} \log Q) . \end{aligned} \right. \quad (30)$$

Les deux premiers de ces invariants, I et k, sont particulièrement intéressants; nous ne formerons pas ici les invariants et opérateurs d'ordre supérieur.

III. FORMES DE PFAFF PROPORTIONNELLES. — ÉQUATION DE PFAFF. — ADJONCTION D'UN ds^2 .

6. Si au lieu d'une forme ϖ on veut conserver, par les transformations conformes, une équation de Pfaff $\varpi = 0$, les invariants de cette équation sont compris dans ceux de la forme ϖ , et on peut les considérer comme communs à toutes les formes proportionnelles $\varpi = x\varpi_0$, c'est-à-dire indépendants du facteur arbitraire x . On pourra choisir pour ϖ_0 une forme ϖ particulière, et nous le ferons dans la suite; pour l'instant, laissant aux formes ϖ et ϖ_0 toute leur généralité, nous allons établir les relations entre les opérateurs différentiels de ces formes ϖ et ϖ_0 , puis entre les invariants de ces formes.

Soient donc les formes de Pfaff

$$\begin{aligned} \varpi_0 &= A_0 du + B_0 dv & \varpi &= A du + B dv = x\varpi_0 \\ A &= xA_0 & B &= xB_0 & P &= x^2P_0 & Q &= Q_0 . \end{aligned} \quad (31)$$