Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1931)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES DÉRIVÉES SUIVANT DES DIRECTIONS QUELCONQUES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

Autor: Cioranescu, N.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23883

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES DÉRIVÉES SUIVANT DES DIRECTIONS QUELCONQUES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

PAR

N. CIORANESCU (Bucarest).

---

1. — Il me semble que dans la plupart des traités d'Analyse on ne donne pas assez d'attention aux dérivées d'une fonction de plus d'une variable, suivant des directions arbitraires, et non seulement suivant les directions du système de référence. Et pourtant la dérivée suivant la direction de la normale à une courbe ou à une surface, s'introduit dans les formules fondamentales de l'Analyse et de la Physique mathématique. On a ainsi des dérivées d'une fonction suivant des directions variables avec le point.

Dans ce qui va suivre, nous faisons quelques considérations élémentaires sur les dérivées suivant des directions fixes, mais d'ailleurs arbitraires, attachées à chaque point M. Il est évident que sur la droite qui porte cette direction, la fonction se comporte comme une fonction d'une seule variable. On arrive ainsi à une expression très simple pour la formule de Taylor pour une fonction de plusieurs variables, et à une définition remarquable du laplacien d'une fonction en un point.

2. — Comme ce qui va être dit est indépendant du nombre des variables, considérons une fonction de trois variables, par exemple $u(x, y, z)$, qu'on désigne aussi par $u(\mathrm{M})$, M étant le point de l'espace dont les coordonnées sont x, y, z.

Supposons que $u(\mathrm{M})$ soit une fonction continue qui admet des dérivées partielles par rapport aux trois variables, jusqu'à un certain ordre. Soit D une droite issue de M, de cosinus directeurs α, β, γ.

Si M′ est un autre point de cette droite, alors la limite du

rapport: $\frac{u(M') - u(M)}{\overline{MM'}}$ lorsque $M' \longrightarrow M$ est par définition la dérivée de la fonction $u(M)$ suivant la direction $l(\alpha, \beta, \gamma)$ de la droite D. Si on la désigne par $\frac{du}{dl}$ $\left(\text{ou } \frac{\partial u}{\partial l}\right)$ on a:

$$\frac{du}{dl} = \frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\gamma \,. \tag{1}$$

Cette relation signifie que le vecteur de composantes $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ et d'origine M a pour projection sur D, $\frac{du}{dl}$.

Lorsque M varie, mais que la direction l attachée à lui reste la même (α, β, γ indépendants de M), alors la dérivée de $\frac{du}{dl}$ suivant la même direction l est:

$$\frac{d^2u}{dl^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\alpha^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\beta^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\gamma^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\alpha\beta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\alpha\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\beta\gamma \tag{2}$$

et ainsi de suite. On peut écrire en général, sous la forme symbolique bien connue:

$$\frac{d^n u}{dl^n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\gamma\right)^{(n)} . \tag{3}$$

Grâce à cette expression, on peut donner une forme plus saisissante à la formule de Taylor. Soient $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point fixe et $M(x, y, z)$ un point variable. Supposons que $u(x, y, z)$ admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n + 1$. Soit D la droite M_0M, pour les cosinus directeurs de laquelle on peut prendre:

$$\alpha = \frac{x - x_0}{r} \;; \qquad \beta = \frac{y - y_0}{r} \;; \qquad \gamma = \frac{z - z_0}{r}$$

où

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \,.$$

En supposant que dans le calcul des dérivées successives de u suivant D, M ne se déplace que sur cette droite, alors on peut écrire:

$$u(M) = u(M_0) + \sum_{p=1}^{n} \frac{r^p}{p\,!}\left(\frac{d^p u}{dl^p}\right)_{M_0} + \frac{r^{n+1}}{(n+1)\,!}\left(\frac{d^{n+1} u}{dl^{n+1}}\right)_P \tag{4}$$

P étant un point situé entre M_0 et M.

Lorsque $u(\mathrm{M})$ est analytique, on a au second membre une série. La démonstration classique de la formule de Taylor, avec l'introduction d'un paramètre t, revient en somme à celle-ci, car on ne fait autre chose que de considérer $u(\mathrm{M})$ comme fonction du paramètre qui définit la position de M sur D. Cette manière d'écrire la formule de Taylor me paraît beaucoup plus saisissante. Elle montre aussi que la connaissance en un point M_0 des dérivées successives $\left(\frac{d^m u}{dl^m}\right)_{\mathrm{M}_0}$ suivant une même direction, suffit pour avoir la fonction U en un point M situé sur la droite qui porte cette direction. Sur cette droite $u(\mathrm{M})$ n'est qu'une fonction de $r = \overline{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$, ce qui n'est pas pour surprendre.

On peut, grâce à cette formule, comme dans le cas des fonctions d'une seule variable, trouver des définitions directes pour les dérivées d'ordre supérieur, suivant des directions arbitraires. Considérons ce cas très simple: Soit M′ le symétrique de M par rapport à M_0. On a:

$$\lim_{r \to 0} \frac{u(\mathrm{M}') + u(\mathrm{M}) - 2u(\mathrm{M}_0)}{r^2} = \left(\frac{d^2 u}{dl^2}\right)_{\mathrm{M}_0} \tag{5}$$

$$r = \overline{\mathrm{M}_0\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{M}_0\mathrm{M}'} .$$

l étant la direction sur laquelle $\mathrm{M}, \mathrm{M}' \longrightarrow \mathrm{M}$. Il est possible d'obtenir un théorème analogue au théorème de Schwarz et montrer que si la fonction continue $u(\mathrm{M})$ est telle que (5) est nulle *quelque soit la direction sur laquelle* $\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}_0$, alors $u(\mathrm{M})$ est une fonction linéaire par rapport aux variables dont elle dépend, dans la région où cela a lieu. La démonstration est immédiate dans le cas où $u(\mathrm{M})$ admet des dérivées partielles de deux premiers ordres. Nous n'insistons plus sur ces considérations, en nous contentant de les avoir signalées.

3. — Il est facile de vérifier que si l et l' sont deux directions fixes, attachées à chaque point M, on a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l \partial l'} = \frac{\partial^2 u}{\partial l' \partial l} .$$

De même on voit que si l_1, l_2, l_3 sont trois directions fixes, rectangulaires, formant en chaque point M un trièdre ayant la

même orientation que celui des axes, alors:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$$

propriété bien connue du laplacien de rester invariant pour tout changement des axes.

Considérons la direction $l(\alpha, \beta, \gamma)$ et le point M_0. On a que

$$\left(\frac{d^2 u}{dl^2}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right)_{M_0} \alpha^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}\right) \beta^2 + \dots + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\right)_{M_0} \beta\gamma \,.$$

Supposons que l'on fasse varier la direction l, en lui donnant toutes les directions possibles de l'espace; c'est-à-dire si M est sur D et $M_0M = 1$, on fait décrire à M la sphère Σ centrée en M_0 et de rayon 1. Prenons la valeur moyenne de $\left(\frac{d^2 u}{dl^2}\right)_{M_0}$ pour toutes les directions possibles pour l.

On trouve sans peine que:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{d^2 u}{dl^2}\right) d\sigma = \frac{1}{3} (\Delta u)_{M_0} \,. \tag{6}$$

On a ainsi une expression du laplacien d'une fonction en un point, qui met une fois de plus en évidence son indépendance du système de référence.

4. — Enfin, pour terminer, nous allons montrer comment on peut obtenir l'intégrale générale de certaines équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants. Supposons que l'on ait, quelque soit M, et pour une direction fixe attachée à ce point,

$$\frac{du}{dl} = \frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\gamma = 0 \,. \tag{7}$$

Il s'agit d'intégrer cette équation du premier ordre (on a: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, mais le cas où l'on aurait une équation analogue mais à coefficients constants quelconques, peut se ramener à celui-ci en divisant avec la somme des carrés des coefficients). L'intégration peut se faire par de simples considérations de géométrie.

Prenons un nouveau système d'axes, $Ox'y'z'$ tel que $Ox' \| l$, et Oy', Oz' complètent le trièdre. L'équation (7) peut s'écrire alors: $\frac{\partial u}{\partial x'} = 0$ donc $u = \varphi(y', z')$.

Par conséquent l'intégrale générale de l'équation (7) est:

$$u = \varphi(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)$$

φ étant une fonction arbitraire et α', β' ... γ'' des constantes qui vérifient les relations suivantes:

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0 \quad \Sigma\alpha'^2 = \Sigma\alpha''^2 = 1 \tag{8}$$

De même, si l'on avait quelque soit M:

$$\frac{d^2 u}{dl^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\alpha^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\beta^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\beta\gamma = 0 \tag{9}$$

par le même changement d'axes elle devient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = 0 .$$

Par conséquent, la solution la plus générale de l'équation (9) est:

$$u = \varphi(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z) + (\alpha x + \beta y + \gamma z)\, \psi(\alpha' x + \ldots, \alpha'' x + \ldots) ,$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires, α', β' ... γ'' étant des constantes qui satisfont aux relations (8).

Et ainsi, pour d'autres systèmes à coefficients constants, on peut trouver comme précédement l'intégrale générale.

Ces quelques considérations élémentaires sont suffisantes, je crois, pour montrer l'utilité de traiter dans les Cours d'Analyse, même élémentaires, la notion de dérivée suivant une direction quelconque.

Février 1931.