Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 30 (1931)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES SÉRIES DE FONCTIONS RATIONNELLES
Autor: Badesco, Radu
Kapitel: 1. — Remarques préliminaires.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23894

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

les C_m étant des constantes données et $\Phi^0_m(z)$, $(m = 0, 1, \ldots)$, une suite de fonctions de la variable complexe z, qui vérifient le système récurrent infini

$$P_m(z)\,\Phi^0_m(z) = \sum_{n=1}^{m} Q_{m,n}(z)\,\Phi^0_{m-n}(z) + R_m(z)\ , \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

où $P_m(z)$, $Q_{m,n}(z)$ et $R_m(z)$ sont des polynomes connus de z. Il est facile à voir que toutes les fonctions $\Phi^0_m(z)$ sont rationnelles. En effet, supposant que z est distinct de tous les zéros des polynomes $P_m(z)$, nous pourrons calculer de proche en proche toutes les fonctions $\Phi^0_m(z)$, dont les expressions seront données par la relation [1]

$$\Phi^0_m(z) = \frac{1}{P_0(z)\,P_1(z)\ldots P_m(z)} \begin{vmatrix} Q_{m,1}(z) & Q_{m,2}(z) & \ldots & Q_{m,m}(z) & R_m(z) \\ -P_{m-1}(z) & Q_{m-1,1}(z) & \ldots & Q_{m-1,m-1}(z) & R_{m-1}(z) \\ 0 & -P_{m-2}(z) & \ldots & Q_{m-2,m-2}(z) & R_{m-2}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -P_0(z) & R_0(z) \end{vmatrix} \tag{3}$$

Nous voyons bien que $\Phi^0_m(z)$ apparaît comme un quotient de polynomes. *La série* (1) *est donc une série de fonctions rationnelles qui, dans l'hypothèse faite, est définie formellement d'une manière univoque à partir des polynomes donnés.* C'est des séries de cette forme que nous nous occuperons dans notre article.

1. — Remarques préliminaires.

Considérons la série un peu plus générale

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m C_m\,\Phi^0_m(z)\ , \tag{4}$$

où λ est un paramètre complexe et ρ un nombre réel positif. Si

[1] Obtenue en résolvant par la règle de Cramer le système d'équations linéaires déduit des $(m + 1)$ premières relations de (2).

nous désignons par ρ_1 le rayon de convergence dans le plan λ de la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m C_m \, .$$

le rayon R_1 correspondant à (4) sera évidemment donné par la relation $R_1 = \rho_1 . R$, où R est le rayon de convergence de la série particulière

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m \Phi_m^0(z) \, . \qquad (4')$$

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité de notre étude, considérer seulement la série (4′) pour laquelle toutes les constantes C_m sont égales à l'unité.

Nous sommes obligés d'introduire dès le début *une condition nécessaire* dans notre recherche: la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m R_m(z) \qquad (5)$$

doit converger uniformément en λ sur un certain cercle C, dont le centre est à l'origine O_λ, ceci quel que soit z appartenant à un domaine simplement connexe D qui contient l'origine O_z. Cette série représente donc une fonction holomorphe de la variable λ sur tout le cercle fermé C. Prenons ρ égal au rayon de ce cercle. Il est évident que dans ces conditions, la série (5) admet un cercle de convergence C_1 dont le rayon est plus grand que ρ.

Posons maintenant $\Phi_m^0(z) = \rho^m . \Phi_m(z)$; nous déduisons de (2) que les nouvelles fonctions $\Phi_m(z)$ satisfont au système récurrent

$$P_m(z)\, \Phi_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{Q_{m,\,n}(z)}{\rho^n} \Phi_{m-n}(z) + \frac{R_m(z)}{\rho^m} \, . \quad (m = 0, 1, \ldots) \qquad (2')$$

De cette manière, nous rattachons le rayon de convergence de notre série (4′) à celui de la série connue (5), ce qui d'ailleurs est inhérent au problème.