

Deuxième cas: $a = \frac{1}{2}$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Des inégalités (3) et (3') on déduit alors les inégalités:

$$(t_n - t) - \frac{1}{2a+1} (e^{-2x} - e^{-2X_n}) < x - t < (t_n - t) + \frac{1}{2a-1} (e^{-2x} - e^{-2X_n}).$$

La courbe (c) est fixe; l'indice n est quelconque. Lorsque n tend vers $+\infty$, les inégalités précédentes donnent:

$$-\frac{1}{2a+1} e^{-2x} \leq x - t \leq \frac{1}{2a-1} e^{-2x}. \quad (5)$$

La courbe intégrale étudiée de l'équation (F) est donc asymptote à la courbe intégrale (c) de l'équation (1), courbe périodique¹.

Les inégalités (6) fournissent une limite de la distance de la courbe étudiée et de sa courbe asymptote.

DEUXIÈME CAS: $a = \frac{1}{2}$.

10. — Etudions d'abord les portions situées dans la bande définie au n° 2.

L'équation (F) peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} y)^2 - \operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} x). \quad (F')$$

Les inégalités:

$$\frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 y) < \frac{dy}{dx} < \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} y)^2$$

valables lorsque y est positif, fixent pour la différence $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$ la borne supérieure π et la borne inférieure 1. Précisons: x étant une

¹ Dans le problème d'Agrégation de 1928 figurent l'étude des courbes (γ) et (δ), intégrales respectives des équations

$$(\gamma) \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} y, \quad (\delta) \quad \frac{dz}{dx} = -\operatorname{cotg} y,$$

y étant lié à x par l'équation (F). On consultera, pour l'étude de ces courbes, la solution de M. Gambier. Je me borne à indiquer qu'une courbe (γ) quelconque est asymptote à une courbe périodique. Les courbes (δ) jouissent d'une propriété analogue.

fonction croissante de y , on a (même démonstration qu'au n° 7):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 y \, dy}{1 + 2 \sin y \cos y \operatorname{th} x \left(+ \frac{\pi}{2} \right)} < x \left(+ \frac{\pi}{2} \right) - x(0)$$

$$< \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 y \, dy}{1 + 2 \sin y \cos y \operatorname{th} x(0)} .$$

Lorsque $x(0)$ tend vers $+\infty$, la différence $x \left(+ \frac{\pi}{2} \right) - x(0)$, comprise entre 1 et π , tend vers 1.

En effet, les deux intégrales limitant cette différence convergent vers:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \, dy}{(1 + \operatorname{tg} y)^2} = 1 .$$

11. — Toute portion de courbe intégrale coupant la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$ coupe la droite d'ordonnée 0 et, par suite, la droite d'ordonnée $+\frac{\pi}{2}$.

Cette proposition est une conséquence de l'équation (F'): au point d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, le coefficient angulaire de la courbe intégrale étant positif, cette courbe atteint un point d'ordonnée $-\frac{\pi}{4} + \varepsilon$, à partir duquel le coefficient angulaire est supérieur à $\frac{2\varepsilon^2}{(\varepsilon + 1)^2}$.

12. — Les recherches les plus délicates ont trait aux portions comprises entre les droites d'ordonnées $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{4}$.

Toute portion de courbe intégrale ne coupant pas la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$ est asymptote à cette droite.

Dans l'hypothèse contraire, il existerait une portion asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4} - \varepsilon$, ε étant une constante positive. Or, dans la bande:

$$x \geq 0 \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq -\frac{\pi}{4} - \varepsilon$$

le coefficient angulaire de toute courbe intégrale est supérieur à $\frac{2\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon)^2}$, ce qui conduit à la contradiction.

13. — L'inégalité:

$$\frac{dy}{dx} > \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} y)^2$$

valable lorsque y est négatif établit que la courbe intégrale issue d'un point P_0 de coordonnées $x_0 y_0$ et asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, est située, lorsque x est supérieur à x_0 , au-dessus de la courbe intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} y)^2$$

passant par le même point P_0 . Or, sur une telle courbe, le produit $x\left(-\frac{\pi}{4} - y\right)$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Donc:

Sur toute courbe intégrale de (F) asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, le produit $x\left(-\frac{\pi}{4} - y\right)$ finit par être inférieur à $\frac{1}{2} + \varepsilon$, si petite que soit la constante positive ε .

14. — Abordons maintenant l'étude de l'existence de courbes intégrales asymptotes à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$.

L'inégalité:

$$\frac{dy}{dx} \leq A (1 + \operatorname{tg} y)^2 \quad (6)$$

où A est une constante positive, nécessairement supérieure à $\frac{1}{2}$, est valable lorsque le point (x, y) est situé sous ou sur la courbe d'équation:

$$-\operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} x) = \left(A - \frac{1}{2}\right) (1 + \operatorname{tg} y)^2. \quad (7)$$

Pour fixer les idées, limitons l'étude de cette courbe à celle de la portion comprise dans la bande

$$x \geq 1 \quad -\frac{\pi}{3} \leq y \leq -\frac{\pi}{4}. \quad (8)$$

Sur cette portion, y est une fonction croissante de x et tend vers $-\frac{\pi}{4}$ quand x tend vers $+\infty$. Supposons qu'à partir d'un certain point $M(A)$ de coordonnées $x(A)$ et $y(A)$, le coefficient angulaire de la courbe (7) soit supérieur à $A(1 + \operatorname{tg} y)^2$. D'après l'inégalité (6), toute courbe intégrale de (F) issue d'un point d'abscisse supérieure à $x(A)$, et situé sous ou sur la courbe (7), restera nécessairement (lorsque x augmente

indéfiniment) sous la courbe (7) et par conséquent sera asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$.

Démontrons l'existence du point M (A) et recherchons les valeurs de ses coordonnées en fonction de A. Le coefficient angulaire de la courbe (7) est, dans la bande (8), supérieur à: $-0,31(1 + \operatorname{tg} y)$. Il est *a fortiori* supérieur à $A(1 + \operatorname{tg} y)^2$ à partir du point M(A) dont les coordonnées sont définies par les équations:

$$M(A) \begin{cases} -[1 + \operatorname{tg} y(A)] = \frac{0,31}{A} \\ 1 - \operatorname{th} x(A) = \frac{(2A - 1)0,0961}{2A(A + 0,31)} \end{cases}$$

Il est bien entendu que A doit être suffisamment grand pour que le point M (A) soit situé dans la bande (8).

15. — Jusqu'à présent, nous avons laissé constante la quantité A. Faisons maintenant croître indéfiniment cette quantité, à partir d'une valeur choisie de façon que $x(A)$ soit, comme $y(A)$, une *fonction croissante de A*. Un calcul simple établit que cette propriété a lieu à partir de $A = 1,14$. Le point M(A) décrit alors une courbe (Γ) asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$. Le point P de départ de (Γ) correspond à $A = 1,14$. Ses coordonnées sont voisines de 1,984 (abscisse) et $-\pi \cdot 0,288$ (ordonnée). Par chaque point de (Γ) passe une courbe (7) et une seule. Soit (Δ) le domaine limité par (Γ), l'axe Ox et la parallèle à Oy menée par P. De ce qui précède résulte la propriété suivante:

Toute portion de courbe intégrale de (F) issue d'un point P' du domaine (Δ) reste dans ce domaine, est asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, et son coefficient angulaire vérifie l'inégalité (6), en tout point d'abscisse supérieure à celle de P'.

A doit être considéré, dans cette inégalité, comme une constante, dépendant uniquement de la position du point P'.

Il résulte de l'inégalité (6) que le produit $x\left(-\frac{\pi}{4} - y\right)$ finit par dépasser $\frac{1}{4A} - \varepsilon$, si petite que soit la constante positive ε .

Ce dernier résultat est à rapprocher de celui du n° 13, fixant une limite supérieure pour le même produit.

Toute courbe intégrale étudiée dans ce n° sera appelée *courbe du premier type*.

16. — Il importe de préciser les propriétés de la courbe (Γ) aux environs de son asymptote. D'après les valeurs des coordonnées de M(A),

le produit $\left(-\frac{\pi}{4} - y\right)e^{2x}$ tend vers 0,31 lorsque A augmente indéfiniment: à partir d'une valeur numérique de x , la courbe (Γ) est située au-dessus de la courbe (Γ') d'équation:

$$-\frac{\pi}{4} - y = \frac{10}{3}e^{-2x} \quad (\Gamma')$$

et toute courbe intégrale de (F) , coupant la courbe (Γ') , en un point d'abscisse suffisamment grande, est *du premier type*.

Nous appellerons *courbes du deuxième type* les courbes intégrales asymptotes à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, et qui finissent par rester *au-dessus de* (Γ') , et par *courbes du troisième type* celles qui coupent la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$.

Etant donnée une courbe de premier type, il existe toujours une courbe du premier type d'ordonnée supérieure, pour une même valeur de l'abscisse: en effet, soit P' un point de la première courbe, intérieur au domaine (Δ) . Tout point P'' de même abscisse, d'ordonnée supérieure, et situé dans le domaine (Δ) donne naissance à une courbe du premier type.

Etant donnée une courbe du troisième type, il existe une courbe du troisième type d'ordonnée inférieure, pour une même valeur de l'abscisse: en effet, soit P'_1 le point d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, situé sur la première courbe. Tout point P'' , d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, et d'abscisse supérieure à celle de P'_1 , donne naissance à une courbe du troisième type située sous la première.

Ces deux propriétés montrent qu'il existe au moins une courbe de *deuxième type*.

Coupons en effet les courbes intégrales de (F) par une droite d'abscisse constante. Les points situés sur cette droite, qui donnent naissance à des courbes du troisième type, admettent un point limite L qui ne peut donner naissance à une courbe du troisième type. Même raisonnement pour les courbes du premier type, avec point limite L' d'ordonnée inférieure ou égale à celle de L . Dans le cas (qui d'ailleurs n'existe pas, comme nous le verrons plus tard) où L et L' ne sont pas confondus, toute courbe issue d'un point de l'intervalle fermé LL' est du deuxième type. Dans le cas où L et L' sont confondus, la courbe issue de L est du deuxième type.

17. — Nous avons vu qu'une courbe du deuxième type est située *au-dessus de la courbe* (Γ') , pour une valeur assez grande de l'abscisse.

D'après l'équation (F) , le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ est supérieur,

lorsque y est inférieur à $-\frac{\pi}{4}$, à $1 - \operatorname{th} x$ et *a fortiori* à e^{-2x} . Sur une courbe du deuxième type, $\frac{dy}{dx} - e^{-2x}$ est positif; $y + \frac{1}{2}e^{-2x}$, fonction croissante, est inférieure à sa valeur limite, qui est $-\frac{\pi}{4}$. Donc:

Toute courbe intégrale du deuxième type est située sous la courbe (Γ'') d'équation:

$$-\frac{\pi}{4} - y = \frac{1}{2}e^{-2x}. \quad (\Gamma'')$$

18. — Démontrons qu'il n'existe qu'une courbe du deuxième type.

Dans l'hypothèse contraire, soit y une ordonnée suffisamment voisine de $-\frac{\pi}{4}$ pour que les branches de deux courbes intégrales du deuxième type soient situées entre les courbes (Γ') et (Γ''), et soit x et t les abscisses correspondant à y , sur ces deux branches. La différence $t - x$ conserve un signe constant, soit le signe $+$. C'est d'ailleurs une fonction croissante de y , puisque $\frac{dy}{dt}$ est inférieur à $\frac{dy}{dx}$, d'après l'équation (F). On peut donc écrire, pour $y > y_0$:

$$t - x > t(y_0) - x(y_0) = \alpha$$

α est une quantité positive.

D'autre part, il résulte des équations (Γ') et (Γ'') que la différence $-\frac{\pi}{4} - y$ est comprise à la fois entre $\frac{1}{2}e^{-2x}$ et $\frac{10}{3}e^{-2x}$, et entre $\frac{1}{2}e^{-2t}$ et $\frac{10}{3}e^{-2t}$, ce qui n'est possible que si l'on a:

$$e^{2(t-x)} < \frac{3}{20}. \quad (9)$$

Or, d'après l'équation (F):

$$\frac{dt}{dx} = \frac{(1 + \operatorname{tg} y)^2 - 2 \operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} x)}{(1 + \operatorname{tg} y)^2 - 2 \operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} t)}.$$

Le deuxième membre tend vers $e^{2(t-x)}$ lorsque y tend vers $-\frac{\pi}{4}$. Il y a donc contradiction avec l'inégalité (9): $\frac{dt}{dx}$ finissant par rester supérieur à une quantité supérieure à 1, puisque $t - x$ est supérieur à une quantité positive α , la différence $t - x$ devrait croître indéfiniment avec x .

19. — Soit S le point d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$, situé sur la courbe du deuxième type. Il est utile de connaître des limites de son abscisse.

Limite inférieure de l'abscisse de S. — On obtient une telle limite en procédant à un calcul analogue à celui du n° 17: Sur la courbe du deuxième type, le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ est supérieur à:

$$-\operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} x) .$$

De sorte que la courbe du deuxième type est nécessairement située *au-dessous* de celle des courbes intégrales de l'équation:

$$\frac{dY}{dx} = -\operatorname{tg} Y (1 - \operatorname{th} x)$$

qui est asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire de la courbe:

$$-\sqrt{2} \sin y = 1 + e^{-2x} .$$

Donc l'abscisse de S est supérieure à celle du point de la courbe précédente, qui a pour ordonnée $-\frac{\pi}{2}$, et *a fortiori* l'abscisse de S est supérieure à 0,44.

Limite supérieure de l'abscisse de S. — Soit (c) la portion de la courbe d'équation:

$$1 + \operatorname{tg} y = -1,9 e^{-2x}$$

située dans la bande

$$x \geq 1 ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq -\frac{\pi}{4} .$$

(On désigne par P le point d'abscisse 1; son ordonnée est supérieure à $-\frac{\pi}{2} \times 0,5723$.)

Nous allons démontrer que *toute courbe intégrale de (F) coupant (c) est asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$* (est du premier type).

Plaçons-nous dans l'hypothèse contraire et désignons par M le point de la courbe intégrale qui a pour ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, et par N le point de la courbe intégrale situé sur (c), le plus proche de M s'il y a lieu de choisir.

Sur la portion NM de la courbe intégrale, on a l'inégalité:

$$\frac{dy}{dx} < \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} y)^2 + 2 e^{-2x} < \left[2 + \frac{(1,9)^2}{2} \right] e^{-2x} .$$

En intégrant:

$$-\frac{\pi}{4} - y(N) < \frac{1}{2} \left[2 + \frac{(1.9)^2}{2} \right] [e^{-2x(N)} - e^{-2x(M)}]$$

et *a fortiori*:

$$-\frac{\pi}{4} - y(N) < 1.9025 e^{-2x(N)}. \quad (10)$$

D'autre part, le point N étant situé sur la courbe (c), on a:

$$\operatorname{tg} \left[-\frac{\pi}{4} - y(N) \right] = \frac{1.9 e^{-x(N)}}{2 + 1.9 e^{-x(N)}} > 0.704 e^{-x(N)}$$

et, en tenant compte de ce que l'angle $-\frac{\pi}{4} - y(N)$ est inférieur à l'angle $-\frac{\pi}{4} - y(P)$:

$$-\frac{\pi}{4} - y(N) > 0.7009 e^{-x(N)}. \quad (10')$$

Les inégalités (10) et (10') sont contradictoires, car $x(N)$ dépasse ou égale 1, ce qui démontre la proposition énoncée plus haut.

La courbe intégrale de (F) passant en P est donc *du premier type*. Cette courbe coupe la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ en un point d'abscisse inférieure à 0,8154, comme on le voit en appliquant l'inégalité:

$$\frac{dy}{dx} < \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 y)$$

à la portion de la courbe intégrale comprise entre P et la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$.

Donc: l'abscisse de S est inférieure à 0,8154.

20. — Résumé. — *Les portions des courbes intégrales de l'équation (F), situées dans la bande définie au n° 2, se partagent en trois types:*

Premier type. — *Courbes intégrales asymptotes à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$; le produit $x \left(-\frac{\pi}{4} - y \right)$ est compris, sur une courbe déterminée, entre deux bornes positives.*

Deuxième type. — *Une seule courbe intégrale, asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$. Le produit $e^{2x} \left(-\frac{\pi}{4} - y \right)$ est supérieur à $\frac{1}{2}$ et finit par être inférieur à $\frac{10}{3}$.*

Troisième type. — Courbes coupant la droite d'ordonnée $+\frac{\pi}{2}$.

La courbe du deuxième type rencontre la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ en un point S d'abscisse comprise entre 0,44 et 0,8154. Tout point de la même ordonnée, situé à droite de S, donne une courbe du premier type. Tout point situé à gauche de S donne une courbe du troisième type.

21. — On passe ensuite aux portions des courbes intégrales situées dans la bande:

$$x \leq 0 \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$$

par symétrie par rapport à 0; et enfin aux courbes intégrales tout entières par translation parallèle à Oy.

Il résulte de ce qui précède que lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, y croît et sa variation totale est finie: toute courbe intégrale finit par être asymptote à une droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ (x tendant vers $+\infty$) ou $+\frac{\pi}{4} + k'\pi$ (x tendant vers $-\infty$).

Toute courbe intégrale se ramène, après translation, à une courbe du groupe de courbes asymptotes à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$; ces courbes sont limitées: à gauche, par la courbe du deuxième type relatif à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$ (cette courbe-limite fait partie du groupe) et à droite, par la même courbe, à laquelle on a fait subir une trans-

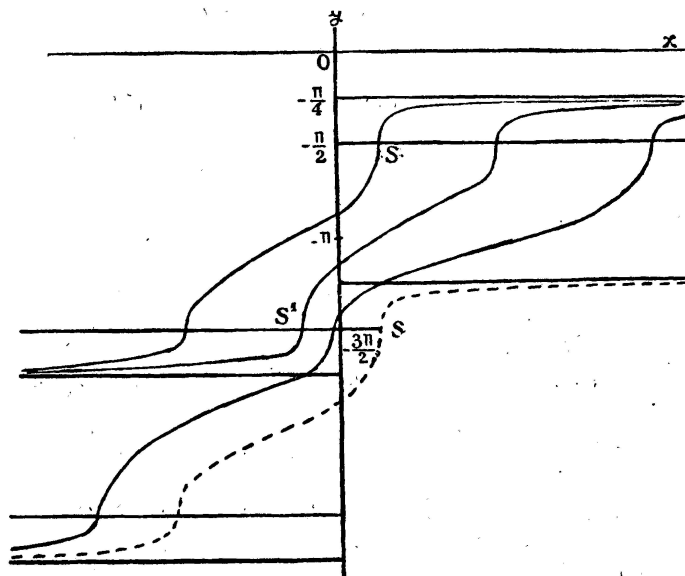


Fig. 2.

lation de $-\pi$, parallèlement à l'axe Oy (cette courbe-limite à droite ne fait pas partie du groupe; elle est indiquée en pointillé sur la figure).

La courbe-limite à gauche coupe l'axe Oy en un point d'ordonnée comprise entre 0 et $-\pi$, et la droite d'ordonnée $-\frac{3\pi}{2}$ en un point d'abscisse inférieure à -1 . Elle est donc asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{7\pi}{4}$, par rapport à laquelle elle est de premier type. La courbe symétrique par rapport au point de coordonnées $0, -\pi$, de la courbe intégrale précédente, est une courbe du groupe. Elle est de deuxième type par rapport à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$ et de premier type par rapport à la droite d'ordonnée $-\frac{7\pi}{4}$. Toute courbe intégrale intermédiaire entre ces deux courbes intégrales possède mêmes asymptotes, par rapport auxquelles elles sont de premier type.

Enfin les autres courbes intégrales du groupe sont asymptotes aux droites d'ordonnées $-\frac{\pi}{4}$ et $-11\frac{\pi}{4}$, par rapport auxquelles elles sont de premier type¹.

TROISIÈME CAS : $a < \frac{1}{2}$.

22. — On peut classer *a priori* en plusieurs catégories les portions des courbes intégrales situées dans la bande définie au n° 2. En allant du haut vers le bas, les courbes intégrales qui peuvent se présenter sont les suivantes :

Première catégorie. — Courbes coupant la droite d'ordonnée $+\frac{\pi}{2}$. Toute courbe coupant la droite d'ordonnée y''_0 (définie au n° 5; voir la figure de ce numéro) est de première catégorie.

Deuxième catégorie. — Courbes situées au-dessus de (C) et au-dessous de la droite d'ordonnée y''_0 , à laquelle elles sont asymptotes. Nous verrons qu'il en existe une et une seule.

Troisième catégorie. — Courbes coupant la courbe (C). A partir du point d'intersection avec (C), le coefficient angulaire d'une courbe de troisième catégorie est négatif, et la courbe intégrale reste à l'intérieur de (C) qu'elle ne peut couper à nouveau, en raison de la valeur du coefficient angulaire. La courbe intégrale possède donc une asymptote parallèle à Ox , et cette asymptote est la droite d'ordonnée y'_0 . En effet, si c'était une droite d'ordonnée $y'_0 + \varepsilon$, ε étant une quantité positive

¹ Les courbes (γ) et (δ) (se reporter pour la définition à la note du n° 9) admettent des directions asymptotiques. Mais, en général, les asymptotes sont rejetées à l'infini. Il y a exception lorsque la courbe intégrale de (F) correspondante est du deuxième type par rapport à l'une de ses asymptotes. Les courbes (γ) et (δ) correspondantes possèdent alors chacune une asymptote (coefficient angulaire ± 1).