

SUR UNE MÉTHODE PROJECTIVE DANS CERTAINES RECHERCHES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Autor(en): **Marchand, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-23270>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

14. — Le faisceau que nous voudrions faire remarquer surtout est cependant celui défini projectivement par les équations (3.1) et (3.2) et inversement par les équations (10.3) et (10.4). Les courbes mentionnées dans 1. sont toutes des membres de ce faisceau et les définitions équivalentes I et II desquelles résultent la relation $\alpha = \rho s_1 / (\rho - 2)$ jettent une nouvelle lumière sur quelques-unes des propriétés développées par M. Franke dans son article. En conclusion nous voudrions faire remarquer non seulement le rôle joué par les isogonaux conjugués dans l'étude de ces courbes, mais aussi l'utilité du traitement inversif en montrant cette relation.

Hamilton College, février 1930.

SUR UNE MÉTHODE PROJECTIVE DANS CERTAINES RECHERCHES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

PAR

J. MARCHAND (Lausanne).

*Résumé d'une conférence prononcée à Genève, le 4 octobre 1930,
devant la Société suisse des professeurs de mathématiques.*

1. — Le but de cette conférence était d'attirer l'attention sur le secours que peut apporter dans les recherches de géométrie élémentaire la considération d'une conique ou d'un système linéaire de coniques dans le plan, celle d'une quadrique ou d'un système linéaire de quadriques dans l'espace.

L'application de la méthode à des figures planes permet d'en montrer facilement les avantages.

Lorsque la démonstration d'un théorème de géométrie plane apparaît comme fort difficile, lorsque le chemin menant de l'hypothèse à la conclusion ne se voit guère, il est bien évident que ce chemin pourra être fourni par une conique et le système polaire plan qu'elle définit, ou par un faisceau ponctuel de coniques et la transformation du second

ordre qu'il définit, ou par un faisceau tangentiel de coniques ou encore par un réseau ponctuel ou tangentiel de coniques; à la condition que cette conique ou ce système linéaire de coniques soient eux-mêmes définis par les éléments de la figure envisagée et cela parce qu'alors ils établissent immédiatement de nombreuses relations entre ces éléments.

Mais il y a plus. Dans les progrès qu'a fait la géométrie élémentaire depuis une soixantaine d'années, on s'est mis à étudier des figures de plus en plus compliquées. Si une figure plane contient un grand nombre de points, de droites, de cercles, on voit tout de suite des relations entre ces éléments. La difficulté n'est point d'énoncer des théorèmes. Elle est de les grouper en un ensemble homogène et harmonieux. Et on ne peut y arriver qu'en déduisant les propositions que l'on découvre de lois très générales et souvent de lois plus élevées que celles que donne la géométrie élémentaire.

Dans de nombreux cas, la théorie des systèmes linéaires de coniques fournit ces lois. Il est facile de le montrer pour ce qui concerne la géométrie du triangle et celles du quadrilatère ou du quadrangle complet. D'une manière analogue, la théorie des systèmes linéaires de quadriques peut jouer un rôle heureux, dans l'étude du tétraèdre et dans celle des figures de l'espace formées de cinq points ou de cinq plans.

2. — Voici deux théorèmes dont les démonstrations sont données à titre d'exemples de la méthode préconisée.

1. *Soient ABC un triangle quelconque, AA_1 , BB_1 et CC_1 trois droites concourantes issues des trois sommets et coupant les côtés opposés en A_1 , B_1 et C_1 respectivement. Soit ensuite X un point quelconque du plan, AX coupe B_1C_1 en α , BX coupe C_1A_1 en β et CX coupe A_1B_1 en γ . Le théorème consiste dans le fait que les droites $A_1\alpha$, $B_1\beta$ et $C_1\gamma$ sont concourantes¹.*

C'est ici le type du théorème projectif, intéressant par les nombreux cas particuliers qu'il renferme, et que l'on démontre facilement en faisant intervenir une conique.

En effet, il existe une conique touchant BC en A_1 , CA en B_1 et AB en C_1 . Par rapport à cette conique B_1C_1 est la polaire de A, C_1A_1 celle de B et A_1B_1 celle de C. La polaire de X est une droite x qui coupe B_1C_1 en α' , C_1A_1 en β' et A_1B_1 en γ' .

On voit aisément que α et α' divisent harmoniquement le côté B_1C_1 , β et β' le côté C_1A_1 et γ et γ' le côté A_1B_1 du triangle $A_1B_1C_1$. Et comme les points α' , β' et γ' sont alignés, les droites $A_1\alpha$, $B_1\beta$ et $C_1\gamma$ sont concourantes.

Remarquons que si l'on désirait poursuivre l'étude de la figure

¹ On est prié de faire les figures.

envisagée le système polaire dont la conique considérée est la conique fondamentale nous permettrait d'énoncer de nombreux théorèmes.

II. Soit ABC un triangle quelconque. De chacun des sommets pris pour origine, menons deux demi-droites dirigées vers l'intérieur du triangle et divisant l'angle correspondant en trois parties égales, a_1 et a_2 de A , b_1 et b_2 de B et c_1 et c_2 de C .

Dans une rotation autour de chacun des sommets, on rencontrera successivement, autour de A , AB , a_1 , a_2 , AC ; autour de B , BC , b_1 , b_2 , BA ; autour de C , CA , c_1 , c_2 , CB . Nommons X le point $b_1 c_2$; Y le point $c_1 a_2$ et Z le point $a_1 b_2$; puis R le point $c_1 b_2$, S le point $a_1 c_2$ et T le point $b_1 a_2$.

Le théorème consiste dans le fait que le triangle XYZ est équilatéral.

Une démonstration élémentaire de ce théorème n'est pas facile. Néanmoins M. le professeur Mirimanoff en a imaginé une fort ingénieuse qui consiste à construire tout d'abord le triangle BRC et le centre X du cercle inscrit dans ce triangle, puis le triangle équilatéral XYZ et enfin les autres éléments de la figure.

Mais, voici comment on peut conduire la démonstration. On prouvera tout d'abord que l'hexagone $RZSXTY$ est circonscrit à une conique; ses diagonales principales RX , SY et TZ concourent donc en un point O . Des calculs d'angles faciles feront voir ensuite que ces droites forment entre elles des angles de 120° et sont respectivement perpendiculaires aux côtés YZ , ZX et XY du triangle XYZ . Il en résultera la conclusion du théorème énoncé.

La clef de la démonstration est donc le concours des droites RX , SY et TZ . Démontrons ce fait. Le faisceau tangentiel des coniques dont b_1 , b_2 , c_1 et c_2 sont les tangentes communes contient les coniques dégénérées dans les paires de points BC et RX . R et X sont inverses isogonaux par rapport au triangle ABC , de même que B et C . L'involution des tangentes menées de A aux coniques du faisceau est symétrique. Elle est formée des paires de droites également inclinées sur les bissectrices de l'angle A . Une des coniques du faisceau touche la droite a_1 donc aussi la droite a_2 . L'hexagone $RZSXTY$ est donc un hexagone de Brianchon. C.Q.F.D.

3. — Quoi qu'on en ait dit, la géométrie du triangle est un des plus remarquables progrès qu'aient fait les mathématiques élémentaires depuis 1870.

Malheureusement, elle est devenue un fouillis de définitions et de propositions qui, pour beaucoup, ne présente aucun attrait. Pour rallier ceux-là il importe plus de grouper les théorèmes connus sous des lois très générales que d'en découvrir de nouveaux. Des faits pris parmi les plus simples laissent entrevoir que l'on peut écrire de beaux chapitres de géométrie du triangle en déduisant les propositions qui les composent des propriétés de systèmes linéaires de coniques.

Ainsi deux points inverses isogonaux sont conjugués à toutes les hyperboles équilatères admettant le triangle pour triangle polaire commun. L'inversion isogonale est donc une transformation du second ordre bien connue. D'une manière analogue, deux transversales réciproques sont conjuguées à toutes les paraboles admettant le triangle pour triangle polaire commun. Toute la théorie des transversales réciproques s'en déduit. Et certaines coniques particulières conduiront aussi à de nombreux théorèmes que l'on peut établir fort élégamment : ainsi l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle et passant par le centre de gravité ou la parabole tangente aux six droites qui sont les côtés du triangle des pieds des hauteurs et les côtés du triangle médian du triangle donné.

4. — Mais, c'est peut-être dans la géométrie du quadrilatère complet et dans celle du quadrangle complet que la théorie des systèmes linéaires de coniques est le plus utile. Pour ce qui regarde le quadrilatère complet, la parabole inscrite et le faisceau des coniques inscrites permettent d'en établir les premières propriétés. Certains réseaux de coniques conduisent à d'autres théorèmes. Il est d'ailleurs agréable de considérer un réseau ponctuel de coniques comme réseau des coniques polaires des points du plan par rapport à une cubique. Ce qui fait intervenir le réseau des coniques apolaires de la cubique, formé des courbes de deuxième classe harmoniquement inscrites aux coniques polaires, puis la hessienne et la cayleyenne de cette cubique.

Chacune des cubiques introduite ainsi dans le quadrilatère complet sera définie par le réseau de ses coniques apolaires. Ce réseau contiendra les coniques inscrites et une autre courbe de deuxième classe arbitrairement choisie ; si cette dernière conique est formée, par exemple, de la paire des points cycliques ou de deux points situés à l'infini dans des directions rectangulaires, la cubique envisagée possédera des propriétés métriques particulières de même que sa hessienne, sa cayleyenne et son système polaire.

Les propriétés des paires de points qui constituent des coniques apolaires dégénérées d'une cubique, c'est-à-dire des paires de points correspondants de la hessienne de cette cubique (points correspondants au sens de Mac-Laurin) se traduiront alors par des relations métriques qui seront des propriétés métriques de paires de points remarquables dans le plan du quadrilatère complet.

De même les propriétés des paires de tangentes correspondantes de la cayleyenne de la cubique conduiront à des propriétés métriques de droites remarquables.

Enfin, les coniques polaires des points d'une droite, par rapport à l'une des cubiques envisagées, formeront un faisceau ponctuel et ce faisceau définit une transformation du second ordre. Dans ces transformations, les points cycliques pourront être des points doubles ou seulement des points correspondants suivant que l'on considère une

cubique ou une autre. Ces transformations mettront en évidence de nombreuses propriétés métriques nouvelles.

Par exemple, la cubique admettant la paire des points cycliques pour conique apolaire aura pour hessienne le lieu des foyers des coniques inscrites et pour cayleyenne l'enveloppe des axes des coniques inscrites. Cette cayleyenne, courbe de troisième classe, touchera en particulier les douze bissectrices du quadrilatère, la droite de l'infini et la droite de Newton. Par la considération de cette cubique et de son système polaire, on sera conduit aux propriétés des foyers des coniques inscrites, du point de Miquel et à toutes les propriétés du quadrilatère qui ressortent de la considération de ses bissectrices.

PROBLÈME DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL DONNÉ A L'AGRÉGATION EN 1929

SOLUTION

DE

M. Henri MILLOUX (Strasbourg).

I. Soient Oxyz un trièdre trirectangle de sens direct, p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et y , prises sur une surface S . Former l'équation aux dérivées partielles E qui doit être vérifiée sur S pour que, Γ étant l'intersection de S avec une sphère Σ de centre O et de rayon quelconque r , S et Σ se coupent le long de Γ sous un angle constant V . La valeur de V pourra dépendre de r ; on posera $\cos V = f(r)$, $f(r)$ étant une fonction donnée.

II. Former le système différentiel $\mathcal{C}$ définissant les multiplicités caractéristiques de E . Pour intégrer $\mathcal{C}$, il peut être commode d'utiliser les coordonnées pluckériennes de la normale à S . On trouvera ainsi que toute courbe caractéristique C de E est située dans un plan P passant par O . Sous quel angle P coupe-t-il la développable caractéristique contenant C ?

III. Soient OZ un axe normal à P , et $\cos \alpha \cos \beta$, $\cos \alpha \sin \beta$, $\sin \alpha$, ses cosinus directeurs; soient OY un axe de cosinus directeurs — $\sin \beta$, $\cos \beta$, 0 , et OX un axe tel que le trièdre $OXYZ$ soit trirectangle et de sens