

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: SUR UN FAISCEAU DE COURBES RELATIVES AU TRIANGLE
Autor: Patterson, Boyd C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23269>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR UN FAISCEAU DE COURBES RELATIVES AU TRIANGLE¹

PAR

Boyd C. PATTERSON (Clinton, New York, U.S.A.).

1. — Parmi les lieux nombreux et intéressants qui se rapportent au triangle, nous voudrions faire remarquer ceux du troisième ordre étudiés par NEUBERG² et par CASEY, et considérés par M. FRANKE dans un numéro récent de *l'Enseignement Mathématique*³. La courbe de Neuberg peut se définir comme le lieu des points dont le triangle d'images par rapport au triangle donné et le triangle donné lui-même sont en perspective. Par le triangle d'images d'un point P par rapport à un triangle $A_1 A_2 A_3$ nous entendons le triangle dont les sommets sont les images (réflexions) de P dans les côtés de $A_1 A_2 A_3$. M. Franke a étudié en détail la courbe définie en substituant le mot « podaire » pour « image » dans la définition ci-dessus. Il vaut la peine de remarquer que chacune de ces courbes peut se définir en termes d'isogonaux conjugués aussi bien que de triangles perspectifs, et le but de cet article est de montrer les relations entre ces deux définitions. En même temps, nous exposerons, par plusieurs moyens, les trois courbes déjà mentionnées comme des membres d'un seul et même faisceau.

¹ Traduit de l'anglais par Henry A. RODGERS.

² NEUBERG: Mémoire sur le tétraèdre. Mémoires couronnés, etc., Belgique, 1886, pp. 1-72.

BROWN: The 21-Point Cubic. *American Mathematical Monthly*, vol. 32 (1925), p. 110.

MOORE and NEELEY: *Ibid.*, p. 241.

MORLEY: Note on Neuberg's Cubic Curve. *Ibid.*, p. 407.

MORLEY and PATTERSON: On Algebraic Inversive Invariants. *American Journal of Mathematics*, vol. 52 (1930), p. 413.

³ XXVIII^e année, N^{os} 1-3, pp. 91-111. — Voir aussi les remarques de M. DEAUX, pp. 302-304, et de M. ASCOLI, XXIX^e année, pp. 157-158.

2. — Définissons comme suit le ρ -triangle d'un point par rapport à un triangle donné: Étant donné un point P dans le plan d'un triangle $A_1A_2A_3$; sur les perpendiculaires abaissées de P sur les côtés A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 , nous prenons les points A'_1 , A'_2 , A'_3 tels que $PA'_i = \rho \cdot PP_i$ ($i = 1, 2, 3$), où P_i sont les pieds des perpendiculaires abaissés sur les côtés, et ρ est une constante réelle. Le triangle $A_1A_2A_3$ est le ρ -triangle de P par rapport à $A_1A_2A_3$.

Si nous nommons un point (x) par trois nombres x_1, x_2, x_3 proportionnels aux distances perpendiculaires abaissées de (x) sur les côtés du triangle fondamental, l'isogonal conjugué de (x) a les coordonnées $(1/x)$.¹ En prenant $A_1A_2A_3$ pour le triangle fondamental et P pour un point quelconque (x) , les sommets du ρ -triangle ont des coordonnées qui peuvent s'exprimer en termes de x_1, x_2, x_3 comme suit:

$$A'_1 : [(1 - \rho)x_1 \cdot x_2 + \rho c_3 x_1 \cdot x_3 + \rho c_2 x_1]$$

$$A'_2 : [x_1 + \rho c_3 x_2 \cdot (1 - \rho)x_2 \cdot x_3 + \rho c_1 x_2]$$

$$A'_3 : [x_1 + \rho c_2 x_3 \cdot x_2 + \rho c_1 x_3 \cdot (1 - \rho)x_3]$$

où $c_i = \cos A_i$.

3. — La condition, que $A_1A_2A_3$ et $A'_1A'_2A'_3$ soient en perspective, exige que les jonctions $A_iA'_i$ soient concourantes. En prenant (ξ) comme le point variable, nous avons les équations de ces droites:

$$A_1A'_1 : (x_3 + \rho c_2 x_1)\xi_2 - (x_2 + \rho c_3 x_1)\xi_3 = 0$$

$$A_2A'_2 : (x_3 + \rho c_1 x_2)\xi_1 - (x_1 + \rho c_3 x_2)\xi_3 = 0$$

$$A_3A'_3 : (x_2 + \rho c_1 x_3)\xi_1 - (x_1 + \rho c_2 x_3)\xi_2 = 0$$

Ces droites sont concourantes quand

$$\begin{vmatrix} 0 & x_3 + \rho c_2 x_1 & x_2 + \rho c_3 x_1 \\ x_3 + \rho c_1 x_2 & 0 & x_1 + \rho c_3 x_2 \\ x_2 + \rho c_1 x_3 & -(x_1 + \rho c_2 x_3) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

¹ STEINER: Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques. *Gesammelte Werke*, Band I, S. 191.

ROUCHÉ et Ch. DE COMBEROUSSE: *Traité de Géométrie*, Paris, 1900, première partie, p. 455.

CLEBSCH: *Vorlesungen über Geometrie*. Band I, S. 325.

En développant ceci, nous trouvons que le résultat peut s'écrire sous la forme du déterminant :

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

où

$$\begin{aligned} \mu k_1 &= c_1 - \rho c_2 c_3 \\ \mu k_2 &= c_2 - \rho c_3 c_1 \\ \mu k_3 &= c_3 - \rho c_1 c_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

μ étant un facteur de proportionnalité.

4. — Le déterminant que nous venons d'écrire nous donne le théorème suivant :

Théorème : Si le ρ -triangle d'un point P par rapport à un triangle donné $A_1 A_2 A_3$ et $A_1 A_2 A_3$ sont en perspective, alors le ρ -triangle de l'isogonal conjugué de P et $A_1 A_2 A_3$ sont aussi en perspective.

Nous remarquons que k_1, k_2, k_3 peuvent être considérés comme les coordonnées d'un point (k) sur la jonction des points (c_1, c_2, c_3), le centre du cercle circonscrit, et ($c_2 c_3, c_3 c_1, c_1 c_2$), l'orthocentre. C'est-à-dire, (k) est un point sur la droite d'Euler du triangle $A_1 A_2 A_3$.

5. — Des résultats de 3. et de 4. nous avons les définitions suivantes et équivalentes du lieu que nous étudions :

I. Le lieu d'un point (x) dans le plan d'un triangle donné $A_1 A_2 A_3$ tel que son ρ -triangle par rapport à $A_1 A_2 A_3$ et $A_1 A_2 A_3$ lui-même soient deux triangles en perspective, se définit par l'équation (3.1) pourvu que k_i remplisse la condition (3.2).

II. Le lieu d'un point (x) dans le plan d'un triangle donné $A_1 A_2 A_3$, tel que son isogonal conjugué ($1/x$) soit aussi un point sur le lieu et que les jonctions de toutes ces paires d'isogonaux conjugués passent par un point fixe (k) sur la droite d'Euler de $A_1 A_2 A_3$ se définit par l'équation (3.1) pourvu que k_i remplisse la condition (3.2).

6. — Si nous relevons la restriction (3.2) à (k) , (3.1) est un réseau de cubiques passant par les sept points suivants: le centre du cercle inscrit $(1, 1, 1)$, les trois centres des cercles ex-inscrits $(1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$, et $(1, 1, -1)$, et les trois sommets $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ du triangle $A_1A_2A_3$. Les quatre premiers sont les points doubles de la transformation d'isogonaux conjugués

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1/x'_1 : 1/x'_2 : 1/x'_3 .$$

L'isogonal conjugué d'un sommet quelconque du triangle est un point du côté opposé, déterminé par la direction dans laquelle le point s'approche du sommet.

Si nous imposons la restriction (3.2) à (k) nous avons un faisceau de cubiques passant par neuf points, dont nous avons déjà cité les sept, et en plus nous avons le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre. L'isogonal conjugué d'un sommet se détermine maintenant comme ce point coupé du côté opposé par la droite qui lie le sommet et le point (k) .

7. — La courbe de Neuberg est ce membre du faisceau (3.1) et (3.2) pour lequel $\rho = 2$, et par conséquent (k) est le point

$$(c_1 - 2c_2c_3) , \quad (c_2 - 2c_3c_1) , \quad (c_3 - 2c_1c_2) .$$

Celui-ci est le point infini sur la droite d'Euler, comme on peut le vérifier en trouvant le point commun de la droite d'Euler

$$c_1(c_2^2 - c_3^2)x_1 + c_2(c_3^2 - c_1^2)x_2 + c_3(c_1^2 - c_2^2)x_3 = 0$$

et la droite à l'infini

$$s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 = 0$$

où $s_i = \sin A_i$.

La courbe de Franke est ce nombre du faisceau (3.1) et (3.2) pour lequel $\rho = 1$ et (k) est le point

$$(c_1 - c_2c_3) , \quad (c_2 - c_3c_1) , \quad (c_3 - c_1c_2) .$$

Franke montre (et nous le montrerons aussi dans 11.) que celui-ci est le point symétrique à l'orthocentre par rapport au centre du cercle circonscrit.

La courbe qu'a étudiée Casey est ce membre du faisceau pour lequel $\rho = -1$, et (k) a les coordonnées

$$(c_1 + c_2 c_3) , \quad (c_2 + c_3 c_1) , \quad (c_3 + c_1 c_2) ,$$

lesquels, étant proportionnelles à

$$1/s_1 , \quad 1/s_2 , \quad 1/s_3 ,$$

sont les coordonnées du centre de gravité.

8. — Dans la suite nous trouverons que certaines propriétés métriques du lieu que nous considérons, s'étudient plus facilement du point de vue de la géométrie inversive. Pour arriver à ce but, nous dériverons l'équation du lieu dans les coordonnées circulaires. Un point dans le plan complexe sera désigné par $x = X + iY$, X et Y étant ses coordonnées cartésiennes, ou $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, r et θ étant ses coordonnées polaires, et $i = \sqrt{-1}$. Pour la brièveté, nous introduirons l'idée d'un tour ou une direction $t = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$. C'est un complexe nombre dont la valeur absolue est l'unité, donc son conjugué $\bar{t} = 1/t$. Une équation en x et sa conjuguée $\bar{x} = X - iY$ définit une courbe réelle pourvu qu'elle soit égale à l'équation obtenue en remplaçant chaque quantité dans l'équation originelle par sa conjuguée (il peut y avoir une différence de signe, mais elle est insignifiante). C'est-à-dire, pour que $f(x, \bar{x}) = 0$ définisse une courbe réelle, il faut que

$$f(x, \bar{x}) = \pm \bar{f}(\bar{x}, x) .$$

Nous considérerons les sommets du triangle $A_1 A_2 A_3$ comme des points sur la circonférence dont le rayon est unité, mettons t_1, t_2, t_3 , où ces trois tours sont des racines de la cubique

$$t^3 - s_1 t^2 + s_2 t - s_3 = 0 , \tag{8.1}$$

s_1, s_2, s_3 étant les fonctions symétriques des trois t . La circonférence de rayon unité $x\bar{x} = 1$ est le cercle circonscrit du triangle.

Le côté du triangle opposé à t_1 , par exemple, a l'équation

$$x + t_2 t_3 \bar{x} = t_2 + t_3$$

ou

$$x + s_3 \bar{x}/t_1 = s_1 - t_1$$

L'équation du côté opposé à t_i est donc

$$x + s_3 \bar{x}/t_i = s_1 - t_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.2)$$

L'équation dite d'image

$$x + s_3 \bar{y}/t_i = s_1 - t_i \quad (8.3)$$

obtenue en remplaçant \bar{x} par \bar{y} ne définit pas un lieu, car elle n'est pas conjuguée d'elle-même; mais elle donne plutôt pour chaque point x son image y dans le côté opposé à t_i , et réciproquement ¹.

9. — Nous procédons maintenant à la dérivation de l'équation du lieu défini par I dans 5. Si x est un point dans le plan du triangle $t_1 t_2 t_3$ et y_i est son image dans le côté opposé à t_i , nous avons de (8.3)

$$y_i = s_1 - t_i - s_3 \bar{x}/t_i.$$

La longueur dirigée du segment de x au pied de la perpendiculaire abaissée de x sur le côté opposé à t_i est de $\frac{1}{2}(y_i - x)$. En dénotant les sommets du ρ -triangle de x par x_i , nous avons

$$x_i - x = \frac{1}{2} \rho (y_i - x)$$

ou

$$x_i = (1 - \rho/2)x + \rho y_i/2,$$

ce qui nous donne

$$x_i = (1 - \rho/2)x + \frac{1}{2} \rho (s_1 - t_i - s_3 \bar{x}/t_i) \quad (9.1)$$

La jonction de $t_i x_i$ est

$$(z - t_i)/(\bar{z} - 1/t_i) = (x_i - t_i)/(\bar{x}_i - 1/t_i),$$

z étant la coordonnée variable. Si l'on substitue à x_i sa valeur en termes de ρ , x et t_i de (9.1) et que l'on se serve de (8.1) pour

¹ PATTERSON: On Complex Values of a Real Parameter. *American Mathematical Monthly*, vol. 36 (1929), p. 376.

réduire le résultat à une fonction de $t_i, 1/t_i, 1$, nous trouvons que les équations des trois points sont

$$At - \bar{A}/t + C = 0 \tag{9.2}$$

quand t a successivement les valeurs t_1, t_2, t_3 et

$$\begin{aligned} A &= -\rho xz/2s_3 + (1 + \rho/2)\bar{z} + \bar{s}_2\rho x/2 - \bar{x} - \bar{s}_1\rho/2 \\ C &= [(1 - \rho/2)\bar{x} + \rho\bar{s}_1/2]z - [(1 - \rho/2)x + \rho s_1/2]\bar{z} \\ &\quad - \rho\bar{s}_1x/2 + \rho s_1\bar{x}/2 . \end{aligned}$$

La condition que les trois jonctions (9.2) se coupent est tout simplement la condition que l'équation ait trois racines t . C'est-à-dire $A = 0, \bar{A} = 0, C = 0$; de ceci nous éliminons $z, \bar{z}, 1$ et obtenons l'équation voulue du lieu sous forme de déterminant. En développant ceci, l'équation devient

$$\begin{aligned} &(2 - \rho)x^3/s_3 - s_3(2 - \rho)\bar{x}^3 - \rho\bar{s}_1x^2\bar{x} + \rho s_1x\bar{x}^2 - 2s_2(1 - \rho)x^2 \\ &+ 2s_2(1 - \rho)\bar{x}^2 + [\bar{s}_1(2 + \rho) - \rho s_1^2/s_3]x - [s_1(2 + \rho) - \rho\bar{s}_1^2s_3]\bar{x} = 0 . \end{aligned} \tag{9.3}$$

10. — Deux points x et y sont des conjugués isogonaux par rapport au triangle t_1, t_2, t_3 s'ils satisfont à la relation

$$x + y + s_3\bar{x}\bar{y} = s_1 . \tag{10.1}$$

(Cette relation peut se dériver de la propriété que les angles xt_1t_2 et yt_1t_3 sont égaux mais de signe opposé, c'est-à-dire

$$\sphericalangle xt_1t_2 + \sphericalangle yt_1t_3 = 0) .$$

La droite d'Euler est la jonction du centre du cercle circonscrit, point de base ou origine du système de coordonnées, et de l'orthocentre, point $s_1 = t_1 + t_2 + t_3$. Son équation est $\bar{s}_1x - s_1\bar{x} = 0$.

Si les deux points x et y , en plus d'être une paire d'isogonaux conjugués, sont sur la même droite avec un point fixe α sur la droite d'Euler, nous avons

$$\begin{vmatrix} x & \bar{x} & 1 \\ y & \bar{y} & 1 \\ \alpha & \bar{\alpha} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{10.2}$$

où $\bar{s}_1\alpha - s_1\bar{\alpha} = 0$.

En éliminant $y, \bar{y}, 1$ de (10.1), son équation conjuguée

$$\bar{x} + \bar{y} + xy/s_3 = \bar{s}_1,$$

et (10.2) et en développant le déterminant qui en résulte, nous avons l'équation du lieu dérivé de la définition II de 5:

$$\begin{aligned} x^3/s_3 - s_3\bar{x}^3 + \bar{\alpha}x^2\bar{x} - \alpha x\bar{x}^2 - (\alpha + s_1)x^2/s_3 + (\bar{\alpha} + \bar{s}_1)s_3\bar{x}^2 \\ + (\bar{s}_1 + \alpha s_1/s_3 - 2\bar{\alpha})x - (s_1 + \bar{x}\bar{s}_1s_3 - 2\alpha)\bar{x} = 0 \end{aligned} \quad (10.3)$$

où

$$\bar{s}_1\alpha - s_1\bar{\alpha} = 0. \quad (10.4)$$

11. — En comparant les équations (9.3) et (10.3) nous trouvons

$$\alpha = \frac{\rho s_1}{\rho - 2},$$

ce qui est la relation entre la constante ρ de I et le point fixe α de II.

Dans le plan inversif, la région à l'infini est un point, dont l'accès est toujours dans une direction déterminée. Ainsi, pour répéter les résultats de 7. du point de vue inversif, la courbe de Neuberg est cette courbe du faisceau (9.3) pour laquelle $\rho = 2$, ou bien cette courbe du faisceau (10.3) et (10.4) pour laquelle α est le point à l'infini ayant la direction de la droite d'Euler — et cette direction est $(s_1/\bar{s}_1)^{1/2}$. En écrivant $\alpha = r(s_1/\bar{s}_1)^{1/2}$ dans (10.3) et en permettant à r de devenir infini, nous avons l'équation de la courbe de Neuberg:

$$\bar{s}_1x^2\bar{x} - s_1x\bar{x}^2 - \bar{s}_2x^2 + s_2\bar{x}^2 + (s_1^2/s_3 - 2\bar{s}_1)x - (\bar{s}_1^2s_3 - 2s_1)\bar{x} = 0.$$

La courbe de Franke est ce membre du faisceau (9.3) pour lequel $\rho = 1$ ou ce membre du faisceau (10.3) et (10.4) pour lequel $\alpha = -s_1$. Nous remarquons (comme dans 7.) que $\alpha = -s_1$ est le point symétrique de l'orthocentre s_1 par rapport au centre du cercle circonscrit. Dans les coordonnées circulaires ce lieu a l'équation

$$x^3/s_3 - s_3\bar{x}^3 - \bar{s}_1x^2\bar{x} + s_1x\bar{x}^2 - (s_1^2/s_3 - 3\bar{s}_1)x + (\bar{s}_1^2s_3 - 3s_1)\bar{x} = 0.$$

Par un raisonnement semblable nous avons pour la courbe de Casey $\alpha = s./3$ (le centre de gravité) et $\rho = -1$.

12. — En suivant le raisonnement de 6., si nous relevons la restriction (10.4) nous avons au lieu de (10.3) l'équation

$$\begin{aligned} x^3/s_3 - s_3 x^3 + \bar{\alpha} x^2 \bar{x} - \alpha x \bar{x}^2 - (\alpha + s_1) x^2/s_3 + (\bar{\alpha} + \bar{s}_1) s_3 \bar{x}^2 \\ + (\bar{s}_1 + \alpha s_1/s_3 - 2\bar{\alpha}) x - (s_1 + \bar{\alpha} \bar{s}_1 s_3 - 2\alpha) \bar{x} + s_1 \bar{\alpha} - \bar{s}_1 \alpha = 0 . \end{aligned} \quad (12.1)$$

Puisque α , dans ce cas, est un nombre général et complexe et contient deux constantes réelles, (12.1) définit un réseau de courbes sur les sept points mentionnés dans 6. Si, comme dans 11. nous mettons $\alpha = r\tau$, où τ est une direction arbitraire, et que nous permettons à r de devenir infini, nous avons un autre faisceau de courbes:

$$\begin{aligned} x^2 \bar{x}/\tau - \tau x \bar{x}^2 - \tau x^2/s_3 + s_3 \bar{x}^2/\tau + (\tau s_1/s_3 - 2/\tau) x \\ - (\bar{s}_1 s_3/\tau - 2\tau) \bar{x} + s_1/\tau - \bar{s}_1 \tau = 0 . \end{aligned} \quad (12.2)$$

La courbe de Neuberg est aussi un membre de ce faisceau. Pour parler inversement (12.2) est un faisceau de biquadratiques¹ sur les sept points déjà mentionnés et sur l'infini. Il correspond dans la théorie projective à ce faisceau du réseau (3.1) pour lequel (k) est un point sur la droite à l'infini, c'est-à-dire

$$s_1 k_1 + s_2 k_2 + s_3 k_3 = 0 .$$

Projectivement, ceci est un faisceau de cubiques circulaires sur les sept mêmes points et sur les deux points circulaires à l'infini.

Le faisceau (12.2) se distingue par cette caractéristique: qu'il coupe le point à l'infini dans la direction τ . Pour la courbe de Neuberg, ceci se réduit à la propriété déjà connue que son asymptote est parallèle à la droite d'Euler du triangle fondamental.

13. — Outre les réseaux (3.1) et (12.3) nous profitons de l'occasion donnée ici pour mentionner un autre réseau de courbes dont les faisceaux (9.3) et (12.2) sont tous les deux des

¹ Dans les coordonnées circulaires l'équation de la biquadratique générale est du deuxième ordre pour chacune des variables x et \bar{x} .

membres. Ce réseau se définit par I dans 5. en remplaçant la constante réelle ρ par une constante complexe $\sigma = \rho e^{i\theta}$. Étudions les changements que ceci produit dans le triangle $A'_1 A'_2 A'_3$. Puisque maintenant $PA'_i = \sigma \cdot PP_i$, les segments dirigés PA'_i et PP_i ont les relations suivantes entre eux:

$$|PA'_i/PP_i| = \rho$$

et

$$\text{amp } PA'_i/PP_i = \angle P_i P A'_i = \theta .$$

En nous servant de la notation de 9. nous avons

$$x_i - x = \frac{1}{2} \sigma (y_i - x) .$$

Suivant le procédé de ce paragraphe, mais en remarquant que σ est un nombre complexe tandis que ρ est réel, nous obtenons l'équation de ce deuxième réseau de courbes :

$$ax^3 - \bar{a}\bar{x}^3 - bx^2\bar{x} + \bar{b}x\bar{x}^2 - cx^2 + \bar{c}\bar{x}^2 + \lambda x\bar{x} + dx - \bar{d}\bar{x} + \mu = 0 \quad (13.1)$$

où

$$a = \frac{1}{s_3} \bar{\sigma} (2 - \sigma) (2 - \sigma + \bar{\sigma})$$

$$b = \sigma \bar{\sigma} s_1 (2 - \sigma + \bar{\sigma})$$

$$c = 2 \bar{\sigma} s_2 (1 - \sigma) (2 - \sigma + \bar{\sigma})$$

$$d = \bar{\sigma} s_1 [4 + 2\bar{\sigma} - \sigma(\bar{\sigma} - \sigma)] - \sigma \bar{\sigma} s_1^2 (2 - \sigma + \bar{\sigma}) / s_3$$

$$\lambda = \sigma \bar{\sigma} (\bar{\sigma} - \sigma) (3 + s_1 \bar{s}_1)$$

$$\mu = (\bar{\sigma} - \sigma) [\sigma \bar{\sigma} s_1 \bar{s}_1 - (2 + \sigma) (2 + \bar{\sigma})] .$$

L'équation (13.1) définit une courbe quand σ est fixe puisque les coefficients a, b, c, d sont des nombres complexes et que λ et μ sont des nombres imaginaires purs; c'est-à-dire, (13.1) est une équation conjuguée par elle-même, selon les conditions exigées dans 8. D'ailleurs (9.3), (10.3) avec (10.4), et (13.1) sont du même degré, et l'on peut vérifier facilement que (9.3) est ce faisceau du réseau (13.1) pour lequel $\theta = 0$.

14. — Le faisceau que nous voudrions faire remarquer surtout est cependant celui défini projectivement par les équations (3.1) et (3.2) et inversement par les équations (10.3) et (10.4). Les courbes mentionnées dans 1. sont toutes des membres de ce faisceau et les définitions équivalentes I et II desquelles résultent la relation $\alpha = \rho s_1 / (\rho - 2)$ jettent une nouvelle lumière sur quelques-unes des propriétés développées par M. Franke dans son article. En conclusion nous voudrions faire remarquer non seulement le rôle joué par les isogonaux conjugués dans l'étude de ces courbes, mais aussi l'utilité du traitement inversif en montrant cette relation.

Hamilton College, février 1930.

SUR UNE MÉTHODE PROJECTIVE DANS CERTAINES RECHERCHES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

PAR

J. MARCHAND (Lausanne).

*Résumé d'une conférence prononcée à Genève, le 4 octobre 1930,
devant la Société suisse des professeurs de mathématiques.*

1. — Le but de cette conférence était d'attirer l'attention sur le secours que peut apporter dans les recherches de géométrie élémentaire la considération d'une conique ou d'un système linéaire de coniques dans le plan, celle d'une quadrique ou d'un système linéaire de quadriques dans l'espace.

L'application de la méthode à des figures planes permet d'en montrer facilement les avantages.

Lorsque la démonstration d'un théorème de géométrie plane apparaît comme fort difficile, lorsque le chemin menant de l'hypothèse à la conclusion ne se voit guère, il est bien évident que ce chemin pourra être fourni par une conique et le système polaire plan qu'elle définit, ou par un faisceau ponctuel de coniques et la transformation du second