

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES CLASSES PARTICULIÈRES DE POLYNOMES
Autor: Lainé, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20682>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR QUELQUES CLASSES PARTICULIÈRES DE POLYNOMES

PAR

E. LAINÉ (Angers).

On sait que si l'équation en t

$$ct(t-1) + ft + g = 0 \quad (1)$$

a une racine entière positive, n , l'équation différentielle

$$(a + bx + cx^2)y'' + (e + fx)y' + gy = 0 \quad (2)$$

a pour intégrale particulière un polynome de degré n .

J'ai d'ailleurs montré¹ que si l'équation (1) a une racine entière négative, $-n$, l'équation adjointe de (2) aura pour intégrale particulière un polynome de degré n , de sorte que l'intégration de l'équation (2) est toujours ramenée à des quadratures si l'équation (1) a une racine entière de signe quelconque.

Je me placerai exclusivement dans le domaine réel. Admettant l'existence d'une racine entière positive, n , pour l'équation (1), on peut ramener l'équation (2) aux formes canoniques suivantes:

1° l'équation

$$y'' + axy' - nay = 0 :$$

les polynomes correspondants sont les polynomes d'HERMITE;

2° l'équation

$$xy'' + (\gamma - x)y' + ny = 0 :$$

les polynomes correspondants sont les polynomes de KUMMER;

3° l'équation de GAUSS

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + 1)x]y' + n(\alpha + n)y = 0 :$$

¹ Enseignement mathématique, avril 1924.

les polynomes correspondants sont les polynomes de JACOBI, qui comprennent comme cas particuliers les fonctions sphériques primitives;

4^o enfin les deux équations

$$\begin{aligned} x^2 y'' + [(2 - a)x + 1]y' - n(n + 1 - a)y &= 0, \\ (x^2 + 1)y'' + [2(1 - a)x + b]y' - n(n + 1 - 2a)y &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Les polynomes correspondants ne semblent avoir fait l'objet d'aucune recherche particulière: je voudrais indiquer ici quelques propriétés de ces polynomes.

Remarquons d'abord que dans toutes les équations précédentes figurent, avec n , d'autres paramètres que l'on suppose habituellement indépendants de n . On généraliserait donc sans difficulté les polynomes correspondants en supposant que les autres paramètres qui figurent dans les équations différentielles dépendent aussi de n . Par exemple l'équation

$$y'' + x\varphi(n)y' - n\varphi(n)y = 0$$

définit des polynomes qui comprennent, comme cas particuliers, ceux d'HERMITE, quand la fonction φ se réduit à une constante. On a encore pour ces polynomes

$$U_n = e^{-\frac{x^2}{2}\varphi(n)} \frac{d^n}{dx^n} e^{\frac{x^2}{2}\varphi(n)}.$$

Pour simplifier, je supposerai que dans les équations (3) les constantes a et b sont indépendantes de n .

Prenons d'abord la première équation (3)

$$x^2 y'' + [(2 - a)x + 1]y' - n(n + 1 - a)y = 0. \quad (4)$$

C'est une équation qui n'est pas du type de FUCHS, l'origine étant un point d'indétermination. Faisons dans cette équation le changement de variable ¹

$$y = x^a e^{\frac{1}{x}} z;$$

on obtient l'équation

$$x^2 z'' + [(2 + a)x - 1]z' + [a - n(n + 1 - a)]z = 0.$$

¹ P. HUMBERT. Monographie des polynomes de Kummer (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1922).

Or, si on dérive n fois l'équation

$$x^2 u'' + [(a - 2n + 2)x - 1] u' + (a - 2n)u = 0,$$

on retombe, en posant $u^{(n)} = z$, sur l'équation en z . Comme l'équation en u admet l'intégrale $x^{2n-a} e^{-\frac{1}{x}}$, l'équation en z admettra l'intégrale $\frac{d^n}{dx^n} (x^{2n-a} e^{-\frac{1}{x}})$, à laquelle correspond, pour l'équation en y , un polynome de degré n , P_n ; nous poserons

$$P_n = x^a e^{\frac{1}{x}} \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n-a} e^{-\frac{1}{x}}). \quad (5)$$

Telle est la formule qui peut servir de définition aux polynomes P_n .

On en déduira, par des procédés classiques, la relation de récurrence

$$(n+1-a)(2n-a)P_{n+1} = (2n+1-a)[(2n-a)(2n+2-a)x-a]P_n + n(2n+2-a)P_{n-1}. \quad (6)$$

D'après la façon même dont on l'a établie, la formule (5) est toujours valable, que a dépende ou non de n . Prenons par exemple $a = n+1$; l'équation (4) admet alors l'intégrale $y = 1$, et la formule (5) donne dans ce cas

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1} e^{-\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x^{n+1}} e^{-\frac{1}{x}};$$

c'est la formule bien connue d'HALPHEN. On verrait d'ailleurs aisément qu'on a¹, quel que soit a ,

$$P_n = \sum_{m=0}^n C_n^m (n-a+1, n-m) x^{n-m}.$$

La relation (6), au contraire, n'est vraie que si a est indépendant de n . Si a est fonction de n , la relation de récurrence prend des formes très différentes. Par exemple, considérons l'équation

$$x^2 y'' - [2(n-1)x + 1] y' + n(n-1)y = 0;$$

¹ HALPHEN, *Oeuvres*, tome II, p. 448.

on la ramène à l'équation (4) en posant $a = 2n$, et changeant x en $-x$. Les polynômes P_n correspondants vérifient, comme l'a montré TISSERAND, la relation

$$P_{n+1} - (2nx + 1)P_n + n(n-1)x^2P_{n-1} = 0,$$

essentiellement distincte de (6).

Toujours dans l'hypothèse où a ne dépend pas de n , nous signalerons encore la relation

$$P_{n+1} - [(2n + 2 - a)x + 1]P_n = \frac{2n + 2 - a}{n + 1 - a} x^2 \cdot \frac{dP_n}{dx}.$$

Considérons de même l'équation

$$(x^2 + 1)y'' + [2(1 - a)x + b]y' - n(n + 1 - 2a)y = 0. \quad (7)$$

C'est une équation du type de FUCHS, mais on ne peut, au moyen d'un changement de variable dans le domaine réel, la ramener à l'équation de GAUSS. En posant

$$y = (x^2 + 1)^a e^{-b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} z,$$

on est conduit à l'équation

$$(x^2 + 1)z'' + [2(1 + a)x - b]z' + [2a - n(n + 1 - 2a)]z = 0.$$

Or, si l'on dérive n fois l'équation

$$(x^2 + 1)u'' + [2(1 + a - n)x - b]u' + 2(a - n)u = 0,$$

on retombe, en posant $u^{(n)} = z$, sur l'équation en z . L'équation en u admettant l'intégrale $(x^2 + 1)^{n-a} e^{b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$, l'équation en z admet l'intégrale $\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 + 1)^{n-a} e^{b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}]$, à laquelle correspond pour l'équation en y un polynôme de degré n , Π_n . Nous poserons

$$\Pi_n = (x^2 + 1)^a e^{-b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 + 1)^{n-a} e^{b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}]. \quad (8)$$

C'est la formule de définition des polynômes Π_n .

Remarquons que, quand b est nul et a entier positif, la formule (8) devient illusoire dès que les entiers n et a , ce dernier dépendant ou non de n , vérifient la double inégalité $\frac{n}{2} < a < n$: le poly-

nome $(x^2 + 1)^{n-a}$ est alors en effet de degré inférieur à n . Nous supposons b essentiellement différent de 0 : la formule (8) convient alors quel que soit a .

Prenons, par exemple, $a = \frac{n+1}{2}$; l'équation (7) montre que le polynome Π_n se réduit à une constante, soit P_n , que nous allons calculer. On a, par hypothèse

$$P_n = (x^2 + 1)^{\frac{n+1}{2}} e^{-b \operatorname{arctg} x} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 + 1)^{\frac{n-1}{2}} e^{b \operatorname{arctg} x} \right] ;$$

posons en outre

$$z = (x^2 + 1)^{\frac{n-3}{2}} e^{b \operatorname{arctg} x} \quad \text{d'où} \quad P_{n-2} = (x^2 + 1)^{\frac{n-1}{2}} e^{-b \operatorname{arctg} x} \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} .$$

On a successivement

$$\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 + 1) z] = (x^2 + 1) \frac{d^n z}{dx^n} + 2nx \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + n(n-1) \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} ,$$

puis, comme $\frac{dP_{n-2}}{dx} = 0$,

$$(x^2 + 1) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + [(n-1)x - b] \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} = 0 ,$$

et en dérivant

$$(x^2 + 1) \frac{d^n z}{dx^n} + [(n+1)x - b] \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + (n-1) \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} = 0 .$$

On aura par suite

$$\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 + 1) z] = \frac{b^2 + (n-1)^2}{x^2 + 1} \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} ,$$

et enfin

$$P_n = [b^2 + (n-1)^2] P_{n-2} .$$

On trouve d'ailleurs immédiatement $P_0 = 1$, $P_1 = b$. On a donc

$$P_{2n+1} = b \prod_{m=1}^n (b^2 + 4m^2) \quad \text{et} \quad P_{2n} = \prod_{m=1}^n [b^2 + (2m-1)^2] . \quad (9)$$

On peut donc écrire la formule suivante, analogue à celle d'HALPHEN:

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 + 1)^{\frac{n-1}{2}} e^{b \operatorname{arctg} x} \right] = P_n (x^2 + 1)^{-\frac{n+1}{2}} e^{b \operatorname{arctg} x},$$

P_n étant un polynome en b défini par les équations (9). On en déduit, en particulier, la formule

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 + 1)^{\frac{2n-1}{2}} = (x^2 + 1)^{-\frac{2n+1}{2}} [1.3 \dots (2n-1)]^2.$$

Signalons enfin la relation de récurrence

$$(n-a)(n-2a+1)\Pi_{n+1} = n(n+1-a)[4(n-a)^2 + b^2]\Pi_{n-1} \\ + (2n-2a+1)[2(n-a)(n+1-a)x - ab]\Pi_n;$$

comme la relation (6), cette relation n'est valable que si a et b sont supposés indépendants de n .

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIOPHANTE

PAR

É. TURRIÈRE (Montpellier).

Ce travail concerne l'équation de DIOPHANTE,

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^2,$$

en nombres indéterminés, et les formules elliptiques, avec les notations de WEIERSTRASS, permettant d'en obtenir des solutions dépendant de paramètres arbitraires. Il fait suite aux divers articles sur l'arithmogéométrie publiés dans l'*Enseignement mathématique* de 1915 à 1919 (t. XVII, p. 315; XVIII, p. 81; p. 397; XIX, p. 159; p. 233; XX, p. 161 et p. 245). Il se rattache à un mémoire sur les équations indéterminées de Fermat du *Bulletin de la Société mathématique de France* (sous presse).