

J. Hadamard.— Cours d'Analyse professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. Premier fascicule. — 1 vol. gr. in-8° de 336 pages. Prix de la souscription au tome complet : 60 francs. J. Hermann. Paris. 1925.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objektyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

plus simples, à termes quadratiques par exemple. Puis, voici diverses conditions pour qu'une $f(x)$ soit développable en série de fractions rationnelles à pôles donnés. De mieux en mieux, nous atteignons les conditions pour qu'une fonction entière puisse rester bornée sur l'axe réel puis sur des demi-droites issues de l'origine et séparées par des angles égaux. En somme, il y a là, pour les fonctions entières, des lemmes de croissance qui sont lemmes de comparaison avec des expressions algébriques, trigonométriques..., généralement d'une simplicité et d'une originalité remarquables.

Cette impression s'accroît encore avec le Chapitre III relatif à la représentation par des polynômes de fonctions analytiques à singularité donnée. Les théorèmes curieux abondent.

La comparaison, avec une certaine suite géométrique, de la meilleure approximation par polynômes, d'une $f(x)$, conduit à une ellipse d'holomorphie pour cette $f(x)$. La singularité donnée peut être algébrique, logarithmique, essentielle, ce dernier cas étant naturellement le plus compliqué de beaucoup; toutes les fois que le problème peut se résoudre, il l'est par des formules élégantes et simples. Le sujet a suscité également de beaux travaux de M. de la Vallée Poussin. M. Bernstein s'efforce plutôt de compléter que de reproduire ceux-ci.

Deux Notes terminent l'ouvrage. Dans la première, le savant auteur définit la fonction analytique dans le domaine réel, par la forme continue de son approximation polynomiale; à une forme analogue mais discontinue correspond la fonction *quasi-analytique*. Ceci conduit à des théorèmes dus à MM. Hadamard, Denjoy, Carleman, ainsi qu'à M. Bernstein lui-même. La seconde Note a trait aux propriétés exceptionnelles des fonctions entières de genre zéro. On peut conclure, croyons-nous, que l'ouvrage est un des meilleurs qui soient quant au rattachement du réel à l'analytique; il est, en son genre, aussi peu abstrait que possible, puisqu'il recherche dans les $f(z)$ ce qui permet de les représenter pour le mieux en x . Et la représentation éclaire souvent bien des points obscurs dans le champ complexe.

A. BUHL (Toulouse).

J. HADAMARD. — **Cours d'Analyse** professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. Premier fascicule. — 1 vol. gr. in-8° de 336 pages. Prix de la souscription au tome complet : 60 francs. J. Hermann. Paris. 1925.

On a souvent dit que le Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, publié autrefois par Camille Jordan, était aussi bien le Cours du Collège de France. On peut affirmer hautement que cette assertion restera vraie, avec plus de force encore, pour le cours de M. Hadamard. C'est de la rigueur présentée avec une élégance incomparable, ce qui saute aux yeux dès la Première Partie consacrée à des Compléments de Calcul différentiel. La plupart des choses enseignées en Mathématiques spéciales sont généralement admises, mais complétées en leurs points faibles avec une sûreté d'aperçus et une concision frappantes. Par exemple, nous voyons d'abord, comment une dérivée seconde peut, à l'instar d'une dérivée première, être considérée comme un quotient.

Les Jacobiens sont susceptibles d'une interprétation géométrique où intervient l'étendue, à deux ou trois dimensions, associée à des segments infiniment petits, interprétation qui, réciproquement, permet d'orienter rigoureusement de tels segments les uns par rapport aux autres.

Sur des surfaces, un élément de fonction peut être prolongé jusqu'à l'obtention d'ordonnées multiples, sans que l'on ait, pour cela, besoin de franchir des contours apparents.

Les changements de variables sont appliqués à l'équation des cordes vibrantes et conduisent aux transformations de contact ; quand de telles transformations changent une surface en une ligne, celle-ci peut être considérée comme une surface canal très déliée.

Enfin, la délicate théorie des maxima ou minima des fonctions de plusieurs variables mène à la théorie des valeurs stationnaires qui permet notamment de passer de la notion de forme quadratique à celle de forme adjointe.

Avec la deuxième partie du fascicule nous passons aux Principes du Calcul intégral.

Il faut montrer que la notion géométrique d'intégrale définie, que l'on peut parfaitement conserver en vue des besoins les plus immédiatement utilitaires, est cependant susceptible d'extensions logiques qui éclairent sa véritable nature. Les conceptions, si étroitement unies, de continuité et de bornes dans un intervalle demandent d'abord une exposition serrée suivie de la notion de continuité uniforme plus précise, en apparence, que celle de continuité pure et simple, mais pouvant cependant se ramener à cette dernière. Alors seulement la fonction bornée intégrable pourra être bâtie sur un terrain inébranlable où l'on retrouvera logiquement les propriétés de l'intégrale d'abord conçues intuitivement. Une généralisation maintenant abordable est celle de Stieltjes ; il s'agit d'intégrales qui porteraient sur des éléments $f(x) g'(x) dx$ et qui n'auraient rien de nouveau si $g(x)$ avait toujours une dérivée, mais qu'on peut précisément s'arranger à conserver quand celle-ci disparaît. Et voilà un chapitre, très clair et même très court, qui n'en suffit pas moins pour aller jusqu'aux pensées profondes dues à Riemann et généralisées, au début du siècle, par M. Lebesgue.

Pour les intégrales indéfinies, notons la remarque d'Hermite permettant l'intégration d'une fraction rationnelle sans connaissance des racines du dénominateur pourvu que l'intégrale soit également rationnelle. Ensuite, nous passons à l'étude des intégrales hyperelliptiques.

Les intégrales définies conduisent à l'intégration des séries, d'où les discussions nécessaires de la convergence uniforme, puis aux méthodes d'intégration approchée avec de curieux compléments sur les corrections successives qu'on peut leur faire subir. Ces corrections sont capricieuses ; leur demander trop, c'est parfois les compromettre, c'est faire usage de séries apparemment convergentes dans leurs premiers termes, mais finalement divergentes. La notion d'intégrale définie demande ensuite à être étendue au cas des limites infinies et au cas des infinis de la fonction à intégrer. C'est l'occasion de préciser la notion d'espèce pour les intégrales hyperelliptiques.

Les intégrales multiples, présentées très simplement au point de vue physique, n'en offrent pas moins quelques difficultés, dès qu'il faut quitter ce point de vue. Ces difficultés tiennent notamment aux variétés d'infinitude et aussi à la question de l'interversion des intégrations toujours délicate dès que vient à disparaître un sens physique manifestement indépendant d'un ordre de variables. Après l'intégration et la dérivation sous les signes sommatoires, la question des lignes et surfaces d'infinitude est brièvement traitée, d'ailleurs sur d'élégants exemples.

Reste une troisième partie. C'est une application des propriétés des

intégrales. Calculs d'intégrales. Fonctions eulériennes. Intégrales de Dirichlet. Volume de l'hypersphère.

Un dernier et important chapitre est consacré aux séries trigonométriques. C'est d'abord l'intégrale de Dirichlet qui s'y associe, puis le procédé de Fourier pour la formation des coefficients. En gros, de tels développements s'appliquent aux fonctions intégrables évidemment beaucoup plus générales que celles susceptibles d'un développement taylorien pour lesquelles la dérivation doit être indéfiniment possible. M. Hadamard a donné d'ingénieux exemples de lignes brisées représentables trigonométriquement. Sous le nom de « phénomène de Gibbs », il étudie la représentation d'une discontinuité, en $x = c$, par une somme $S_n(x)$ de termes qui ne devient la série complète que pour n croissant indéfiniment. Or, des bizarreries se manifestent suivant les manières de faire tendre x , vers c , et n , vers l'infini. Le phénomène de Gibbs est l'exagération du saut de l'ordonnée dans les approximations ainsi envisagées.

Nous en resterons là en attendant la publication du fascicule qui terminera ce beau volume. Non seulement un tel ouvrage sera comme le pain des esprits logiques, mais il sera pour tous un instrument de travail de premier ordre ; il contient de nombreux exercices placés non à la fin des chapitres, mais mêlés à ceux-ci, indiquant ainsi à chaque pas la réflexion à faire dans un esprit que le lecteur pourra rendre personnel. Décidément le cours de l'Ecole Polytechnique conduira facilement sur les bancs du Collège de France.

A. BUHL (Toulouse).

G. JUVET. — **Mécanique analytique et Théorie des Quanta.** — Un volume gr. in-8° de vi-154 pages. Prix : 20 francs. A. Blanchard. Paris. 1926.

Pour situer commodément l'analyse de cet intéressant ouvrage, je suis tenté de renvoyer le lecteur à mon second article sur *La Pédagogie des Théories d'Einstein*, publié dans le précédent volume de cette Revue. Je montrais notamment (p. 201) qu'aux symétries *stokiennes*, sur lesquelles on peut faire reposer les théories d'Einstein, s'associent naturellement des symétries *antistokiennes* qui donnent naissance aux équations canoniques de Jacobi et Hamilton, ainsi qu'aux propriétés essentielles de ces équations. A ce point de vue, la mécanique einsteinienne et la mécanique analytique classique se font pendant avec la plus remarquable esthétique.

Or, la théorie des quanta nous mène à la mécanique analytique, parce que c'est la moderne théorie de l'atome à constitution corpusculaire, à noyau solaire central autour duquel gravitent de plus minuscules électrons. Il y a de grandes différences entre un tel système et un système planétaire astronomique, ne serait-ce que parce que les corpuscules planétaires du premier ont des charges de même signe, d'où il suit qu'ils ne sont attirés que par le noyau central, mais qu'ils se repoussent entre eux. N'importe ; les méthodes générales exposées par Henri Poincaré dans ses *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* trouvent ici un nouveau champ d'application et il faut alors commencer tout naturellement par l'analyse des équations canoniques. Il n'est pas impossible que Poincaré ait prévu cela un peu avant sa mort ; il nous a laissé, dans cet ordre d'idées, des lignes fort suggestives, où il était déjà question de quanta. Mais assurément, il ne pouvait en prévoir tant quand il se lançait dans la Mécanique céleste avec son fameux mémoire de Stockholm et, cependant, c'est cela qui maintenant triomphe une fois