Ombilics et lignes de courbure.

Autor(en): **Delens, P.-C.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

D. DE LANGE, Eenige beschouwingen over enkel- en meervoudige ombilikaalpunten... (Considération sur les ombilics et les lignes de courbure dans leur voisinage). Thèse de doctorat, Delft, 1904, 82 p.

H. F.

Ombilics et lignes de courbure.

M. Fehr m'ayant aimablement signalé la remarque de M. Picard, je me propose d'ajouter quelques indications à l'exposé de M. Picard et à ma note précédente; dans celle-ci, j'avais suivi le plan de l'article de M. Winants et suggéré de rattacher le problème des lignes de courbure aux ombilics à la géométrie conforme; mais les lignes de courbure sont naturellement autre chose que des trajectoires orthogonales ordinaires et on peut aussi les étudier sur une surface donnée sans mettre en jeu les représentations conformes de celle-ci.

Peut-être sera-t-il intéressant à ce sujet de présenter quelques remarques géométriques à côté de la délicate analyse de M. Picard, qui n'a d'ailleurs étudié que le cas *général*, ce qui n'épuise pas le sujet. Interprétons pour cela l'équation du troisième degré qu'utilise M. Picard.

Soient, pour une ligne tracée sur une surface, ds l'élément d'arc, k_g la courbure géodésique, R et T les rayons de courbure normale et de torsion géodésique en un point, H la courbure moyenne de la surface. Il existe, en tout point d'une surface, des éléments géométriques communs aux lignes tracées sur la surface et tangentes en ce point, mis en évidence par Laguerre, puis Darboux; les fonctions de Laguerre et Darboux sont suivies d'autres fonctions plus compliquées qu'on construit facilement de proche en proche; les lignes de la surface, pour lesquelles une de ces fonctions s'annule, sont données par des équations différentielles de degrés successifs 2, 3, .. p, ... de sorte qu'en un point de la surface passent en général 2, 3, ... p, ... telles lignes. Posons:

$$\frac{1}{R} = \Lambda_2', \qquad \frac{1}{T} = \Delta_2,$$

$$\frac{d\frac{1}{R}}{ds} - 2\frac{k_g}{T} = \Lambda_3', \qquad \frac{d\frac{1}{T}}{ds} + 2k_g\left(\frac{1}{R} - H\right) = \Delta_3,$$

Λ_3' et Δ_3 sont les fonctions de Laguerre et de Darboux attachées à une direction; on obtient des chaînes de fonctions plus simples en substituant à Λ_2' et Λ_3':

$$\frac{1}{R} - H = \Lambda_2 \qquad \frac{d\left(\frac{1}{R} - H\right)}{ds} - 2\frac{k_g}{T} = \Lambda_3$$

et l'on a alors la loi de formation générale:

$$\frac{d\Lambda_p}{ds} - p\, k_g \Delta_p = \Lambda_{p+1}\ , \qquad \frac{d\Delta_p}{ds} + p\, k_g \Lambda_p = \Delta_{p+1}\ .$$

Les formes différentielles correspondantes s'obtiennent par différentiation covariante, suivant une méthode indiquée par M. Cartan [1].

Pour les lignes de courbure:

$$\Delta_2 \equiv 0\ .$$

En un ombilic

$$\Lambda_2 = 0\ .$$

Les lignes de courbure satisfont donc aux ombilics à l'équation:

$$\Delta_3 = 0$$

du troisième degré pour les coefficients angulaires de leurs tangentes. C'est là le cas général; nous pensons d'ailleurs que les formules précédentes permettent une discussion complète du problème. Contentons-nous d'ajouter que pour les lignes de courbure qui sont géodésiques (et alors planes), $k_g \equiv 0$, les fonctions Δ successives s'annulent tout le long de la ligne.

Le Hâvre, le 29 avril 1926.

P.-C. DELENS.

CHRONIQUE

Congrès international de Mécanique appliquée.

Zurich, septembre 1926.

En avril 1924 un groupe de savants hollandais prit l'initiative de réunir à Delft un Congrès international de Mécanique appliquée [2]. Le succès de cette réunion décida les organisateurs à instituer des congrès périodiques. Le Comité international désigné à cet effet a décidé de réunir le deuxième Congrès international de Mécanique appliquée à Zurich. Celui-ci se tiendra sous les auspices de l'Ecole polytechnique fédérale, du 12 au 18 septembre 1926. Son organisation

---

[1] E. CARTAN. Sur les formes différentielles en Géométrie. *C. R. de l'Ac. des Sc.*, 7 janvier 1924.

[2] Voir compte rendu dans l'*Ens. math.*, T. 24, p. 139.