

3. — Carré construit sur un côté d'un triangle

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Nous pouvons donc envisager la relation $h'^2 = a'a'' \pm bb''$ relative à un triangle *acutangle* ou *obtusangle* en A, c'est-à-dire le théorème II', comme étant la *généralisation* du théorème énoncé ci-dessus et relatif à un triangle *rectangle*.

Si l'on tient compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* — c'est-à-dire le théorème II' — peut s'énoncer comme suit :

Dans un triangle QUELCONQUE, le carré construit sur chaque hauteur est équivalent à la somme algébrique du rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant et du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui, la surface d'un des rectangles devant être prise négativement si l'un des segments qui deviennent ses dimensions est négatif.

3. — Carré construit sur un côté d'un triangle.

PREMIER CAS. — Triangle *acutangle* (fig. 4).

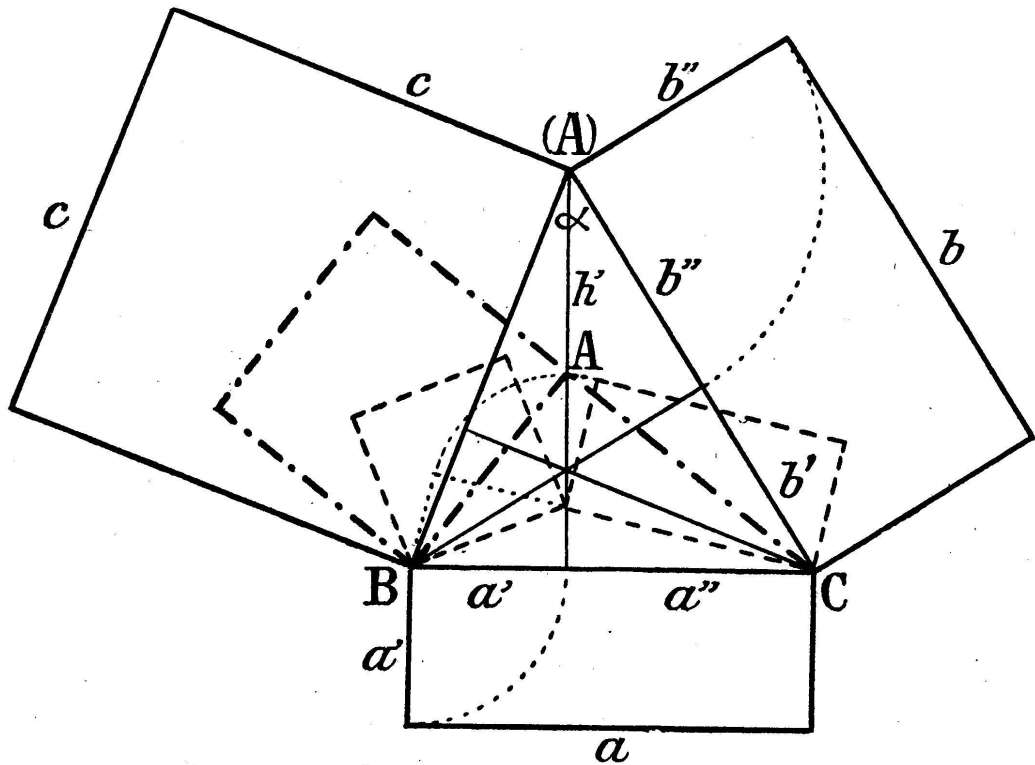


Fig. 4.

Le théorème II donne

$$h'^2 = a'a'' + bb'' .$$

Mais

$$h'^2 = c^2 - a'^2 .$$

Par suite

$$c^2 - a'^2 = a'a'' + bb'' ,$$

d'où

$$c^2 = a'^2 + a'a'' + bb'' =$$

$$= a'(a' + a'') + bb'' .$$

$$c^2 = aa' + bb'' .$$

Par permutation circulaire on a

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = bb' + cc'' , \\ b^2 = cc' + aa'' , \\ c^2 = aa' + bb'' , \end{array} \right. \quad (3)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME III. — *Dans tout triangle ACUTANGLE, le carré construit sur l'un quelconque des côtés est égal à la somme des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.*

SECOND CAS. — Triangle obtusangle ($\alpha > 90^\circ$) (fig. 4).

En effectuant sur les formules (2') les mêmes transformations que, dans le premier cas, sur les formules (2) et en observant que $a = a' + a''$, $b = b' - b''$, $c = c'' - c'$, on est conduit au résultat suivant

$$\alpha > 90^\circ ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = bb' + cc'' , \\ b^2 = -cc' + aa'' , \\ c^2 = aa' - bb'' . \end{array} \right. \quad (3')$$

Le carré du côté opposé à l'angle obtus est donc égal à la somme des rectangles, tandis que le carré d'un côté adjacent est égal à la différence des deux rectangles dont le plus grand correspond au côté opposé à l'angle obtus:

THÉORÈME III'. — *Dans un triangle OBTUSANGLE, le carré construit sur un côté est égal à la somme ou à la différence des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui, suivant que ce premier côté est opposé ou adjacent à l'angle obtus.*

Remarque 1. — Si l'on observe la règle des signes des segments (voir 2, remarque 1), c'est-à-dire si l'on considère comme *négatif* un segment situé en entier sur le prolongement du côté, les formules (3) sont alors valables pour un triangle obtusangle comme pour un triangle acutangle, c'est-à-dire pour un triangle quelconque.

Remarque 2. — Soit ABC un triangle *rectangle* en A (fig. 4) et appliquons-lui le *théorème* suivant:

Dans un triangle rectangle, le carré construit sur un côté de l'angle droit est équivalent au rectangle construit sur l'hypoténuse entière et la projection de ce côté sur l'hypoténuse:

$$\alpha = 90^\circ, \quad c^2 = aa'.$$

Supposons que le sommet A se déplace sur la hauteur h' , a et a' restant invariables.

1° Si A s'éloigne de a , donc si α diminue et devient par conséquent *aigu*, le carré construit sur le côté (c) *augmente du rectangle* bb'' , car on a alors, d'après le théorème III relatif au triangle *acutangle*,

$$\alpha < 90^\circ, \quad \underline{c^2 = aa' + bb''}.$$

2° Si par contre A se rapproche de a , donc si α augmente et devient par conséquent *obtus*, le carré construit sur le côté (c) *diminue du rectangle* bb'' , car on a, dans ce cas, d'après le théorème III' applicable au triangle *obtusangle* en A,

$$\alpha > 90^\circ, \quad \underline{c^2 = aa' - bb''}.$$

D'ailleurs, pour $\alpha = 90^\circ$, la troisième des formules (3)

$$c^2 = aa' + bb''$$

devient précisément, b'' étant nul,

$$\alpha = 90^\circ, \quad c^2 = aa'.$$

Le théorème III, ou plus généralement la relation

$$c^2 = aa' \pm bb''$$

relative au triangle acutangle ou obtusangle en A, est donc la GÉNÉRALISATION du théorème ci-dessus relatif au triangle *rectangle*.

En tenant compte de la règle des signes des segments, le théorème généralisé peut s'énoncer comme suit et il remplace alors les théorèmes III et III' :

Dans un triangle QUELCONQUE, le carré construit sur l'un quelconque des côtés est équivalent à la somme algébrique des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.

4. — Somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs.

PREMIER CAS. — Triangle acutangle (fig. 5).

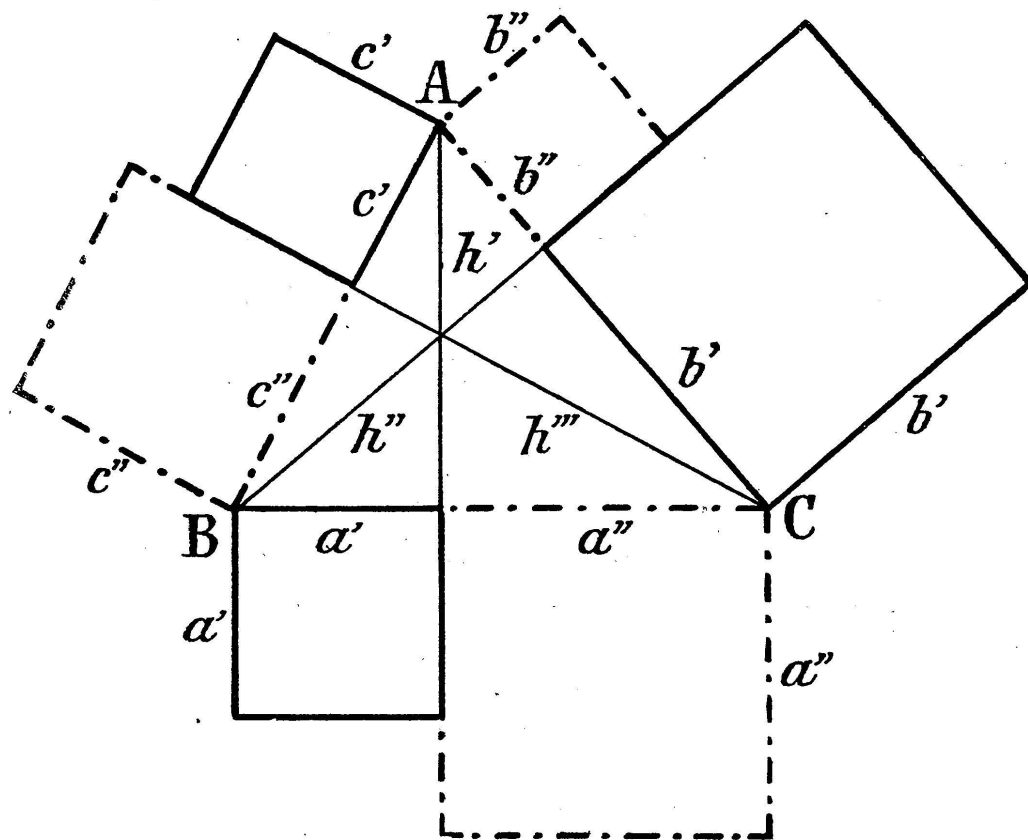


Fig. 5.

Les formules (2), sous leur première forme, peuvent s'écrire, en considérant que $a = a' + a''$, $b = b' + b''$, $c = c' + c''$,

$$h'^2 = a'a'' + bb'' = a'a'' + b'b'' + b''^2,$$

$$h''^2 = b'b'' + cc'' = b'b'' + c'c'' + c''^2,$$

$$h'''^2 = c'c'' + aa'' = c'c'' + a'a'' + a''^2,$$

d'où

$$(\alpha) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2 \cdot (a'a'' + b'b'' + c'c'').$$