

§ 5. Les séries de Fourier restreintes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

de Cesàro en un point x est qu'il existe un entier k tel que si l'on pose

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(t) dt, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_1(t) dt, \dots$$

on ait

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_k(t) = 0.$$

Ils ont montré en particulier que si f est bornée dans un intervalle contenant le point x , la série de Fourier est ou bien sommable au point x pour toute moyenne de Cesàro d'ordre $\delta > 0$ ou bien n'est sommable par aucune. La condition nécessaire et suffisante de sommabilité est dans ce cas : $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_1(t) = 0^1$.

§ 5. LES SÉRIES DE FOURIER RESTREINTES.

1. En général la série obtenue par dérivation terme à terme d'une série de Fourier diverge partout. Mais M. FEJÉR² a déjà établi que l'on peut encore, à l'aide des moyennes arithmétiques, remonter de la série dérivée à la dérivée de la génératrice. M. W. H. YOUNG³ a montré que la série dérivée terme à terme de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée converge presque partout (G, δ) , $\delta > 0$, vers la dérivée de la fonction. Plus généralement, il a établi que⁴:

a) la convergence $(C, 1)$ de la première dérivée (formelle) d'une série de Fourier (c'est-à-dire la série obtenue par dérivation terme à terme) en un point est une propriété locale;

b) qu'il en est de même de la convergence (C, p) de la p -ième dérivée.

Il résulte de ces propositions que si, par exemple, $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ est continue et à variation bornée dans le voisinage d'un point, la p -ième dérivée de la série de Fourier de f converge (C, p) vers $\frac{d^p f}{dx^p}$ au point considéré.

¹ Hardy and Littlewood 3; M. Riesz 7. — ² Fejér 1. — ³ W. H. Young 20. — ⁴ W. H. Young 31.

2. Ces résultats ont conduit M. YOUNG à introduire sous le nom de séries de Fourier restreintes de classe p une classe de séries trigonométriques qui sans être nécessairement des séries de Fourier s'en rapprochent beaucoup par leurs propriétés et qu'il caractérise par les deux propriétés suivantes:

I. La série trigonométrique obtenue en intégrant p -fois terme à terme la série donnée (on laisse de côté le terme constant) est une série de Fourier dont nous désignerons par $F(x)$ la génératrice.

II. Dans un intervalle partiel (a, b) d'un intervalle de périodicité, $F(x)$ est l'intégrale p -uple d'une fonction $f(x)$ intégrable dans (a, b) . On suppose donc que dans (a, b)

$$F(x) = \int_{(p)}^x \dots \int_{(p)}^x f dx \dots dx, \quad f(x) = \frac{d^p F}{dx^p}.$$

La série trigonométrique donnée est alors appelée par M. Young une *série de Fourier de classe p restreinte à l'intervalle (a, b)* et $f(x)$ la fonction *associée* à cette série dans l'intervalle (a, b) . La raison de cette dénomination est que dans (a, b) et relativement à la sommation de Cesàro d'ordre p une telle série a exactement les mêmes propriétés de convergence que la série de Fourier d'une fonction intégrable dans $(0, 2\pi)$ et coïncidant avec $f(x)$ dans (a, b) ¹.

3. Pour pouvoir donner pour une série de Fourier restreinte de classe p des critères de convergence relatifs à une sommation d'ordre $q < p$, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse supplémentaire relative non plus seulement à l'intervalle (a, b) mais à tout l'intervalle $(0, 2\pi)$. Comme hypothèse supplémentaire, M. W. H. Young ajoute la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^{p-1}} = 0.$$

Les conditions de convergence $(C, p-1)$ dans (a, b) d'une telle série sont alors les mêmes que celles de la convergence $(C, p-1)$ de la série de Fourier d'une fonction intégrable dans $(0, 2\pi)$ et coïncidant avec $f(x)$ dans (a, b) ².

¹ W. H. Young 31. — ² W. H. Young 23, 33.

En particulier donc, si $p = 1$, nous voyons qu'une série de Fourier restreinte de classe 1, telle que $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ jouit dans l'intervalle de restriction et relativement à la convergence ordinaire de toutes les propriétés d'une série de Fourier.

M. YOUNG a fait de ces séries une application importante à l'étude de la convergence des séries de polynomes de Legendre ¹, des séries de fonctions de Bessel ² et de certaines séries trigonométriques non harmoniques ³. Une autre application intéressante ⁴ généralise un théorème de FATOU ⁵ affirmant qu'une série de puissances $\sum a_n z^n$, telle que $a_n \rightarrow 0$, de rayon de convergence 1, converge sur le cercle de convergence en tout point de régularité de la fonction analytique engendrée par la série. Ce théorème de Fatou a été dans sa démonstration notablement simplifié par M. M. RIESZ ⁶ qui a montré de plus que la convergence est uniforme sur un arc de régularité et qui a, en remplaçant la condition $a_n \rightarrow 0$ par la condition $\frac{a_n}{n^\delta} \rightarrow 0$ ($\delta \geq 0$), montré que le théorème subsiste, à condition de remplacer la convergence ordinaire par la convergence (C, δ). Si $\left| \frac{a_n}{n^\delta} \right| < M$, les sommes partielles de la série restent bornées (C, δ) aux points de régularité.

§ 6. AUTRES PROCÉDÉS DE SOMMATION.

1. Il est quelquefois utile d'introduire d'autres procédés de sommation équivalents au procédé de Cesàro. C'est ainsi qu'on peut, pour les indices δ positifs entiers, définir avec HÖLDER ⁷ un procédé de sommation que MM. KNOPP ⁸ et SCHNEE ⁹ ont montré équivalent au procédé de sommation (C, δ). CHAPMAN ¹⁰, M. RIESZ ¹¹ et W. H. YOUNG ¹² ont étudié de tels procédés.

2. M. de la VALLÉE-POUSSIN ¹³ a donné un procédé nouveau pour sommer une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$; il consiste à donner comme

¹ W. H. Young 29, 30. — ² W. H. Young 35. — ³ W. H. Young 34. — ⁴ W. H. Young 32. — ⁵ Fatou 1. — ⁶ M. Riesz 3, 5, 6. — ⁷ Hölder. — ⁸ Knopp 1, 2, 3. — ⁹ Schnee; voir aussi Landau 1, 2. — ¹⁰ Chapman 1. — ¹¹ M. Riesz 1, 2; voir aussi Hardy and Riesz 1. — ¹² W. H. Young 3. — ¹³ Vallée-Poussin 2.