

# **XI. — Compléments sur les B a quatre indices.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Elle a alors exactement même structure que les mineurs des termes de la première ligne dans le déterminant  $\Delta_2$  de la seconde formule stokienne fondamentale (3) et ceci est de la plus haute importance; nous verrons bientôt, en effet, que les théories einsteiniennes font reposer les conceptions mécaniques générales sur l'identité (40) et, comme l'électromagnétisme repose sur (3) il y a ici une manière de saisir un des principaux liens unissant les deux disciplines.

Ajoutons que (40) n'est qu'un cas très particulier des « Identities de la Gravifique » récemment réétudiées et réexposées de manière particulièrement didactique par M. Th. De Donder.

## XI. — COMPLÉMENTS SUR LES B A QUATRE INDICES.

Par définition et avec le mécanisme des  $g$  à deux indices exposé au paragraphe VIII, on a

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = g_{\tau\alpha} B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha}, \quad B_{\mu\nu\sigma}^{\tau} = g^{\tau\alpha} B_{\mu\nu\sigma\alpha}. \quad (41)$$

D'après (31) on voit facilement que  $B_{\mu\nu\sigma\tau}$  peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[ \begin{smallmatrix} \mu\sigma \\ \tau \end{smallmatrix} \right] - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left[ \begin{smallmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{smallmatrix} \right] + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{smallmatrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\nu} + \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma\mu \\ \beta \end{smallmatrix} \right\} \left[ \begin{smallmatrix} \beta\nu \\ \tau \end{smallmatrix} \right] - \left\{ \begin{smallmatrix} \nu\mu \\ \beta \end{smallmatrix} \right\} \left[ \begin{smallmatrix} \beta\sigma \\ \tau \end{smallmatrix} \right].$$

Si l'on tient compte de la formule du paragraphe VIII

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \left[ \begin{smallmatrix} ik \\ j \end{smallmatrix} \right] + \left[ \begin{smallmatrix} ij \\ k \end{smallmatrix} \right],$$

il vient, toujours pour  $B_{\mu\nu\sigma\tau}$ , après simplifications

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\tau \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma} \right) + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\} \left[ \begin{smallmatrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] - \left\{ \begin{smallmatrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\} \left[ \begin{smallmatrix} \nu\tau \\ \alpha \end{smallmatrix} \right].$$

De là résulte

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = -B_{\mu\sigma\nu\tau}, \quad B_{\tau\nu\sigma\mu} = -B_{\mu\nu\sigma\tau}, \quad (42)$$

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = B_{\sigma\tau\mu\nu}, \quad B_{\nu\mu\tau\sigma} = B_{\mu\nu\sigma\tau}. \quad (43)$$

D'après la définition, encore donnée au paragraphe VIII, pour  $G_{\alpha i}$ , on a

$$G_{\mu\nu} = g_\sigma^\alpha B_{\mu\nu\sigma}^\alpha = B_{\mu\nu\sigma}^\sigma = g^{\sigma\alpha} B_{\mu\nu\sigma\alpha}. \quad (44)$$

On conclut de là, d'après la dernière identité (43),

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} . \quad (45)$$

L'expression

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

donne, d'après ce que nous avons vu (§ VI) pour toutes les expressions de même nature,

$$G_\sigma = \frac{DG}{Dx_\sigma} = \frac{\partial G}{\partial x_\sigma} . \quad (46)$$

On sait que  $G$  est la *courbure scalaire* pour l'espace dont le  $ds^2$  est

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j .$$

Dans le cas d'une surface ordinaire,  $G$  se réduit à la courbure totale.

## XII. — EQUATIONS GRAVIFIQUES GÉNÉRALES.

Reprenons l'identité de Bianchi, sous la forme (38), et *contractons* la en faisant  $\tau$  égal à  $\rho$ ; il vient

$$(B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho + G_{\mu\sigma\nu} - G_{\mu\nu\sigma} = 0 .$$

On conclut de là

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} (B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho &= (g^{\mu\nu} B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho = (g^{\mu\nu} g^{\rho\tau} B_{\mu\nu\sigma\tau})_\rho \\ &= (g^{\rho\tau} g^{\mu\nu} B_{\tau\sigma\nu\mu})_\rho = (g^{\rho\tau} B_{\tau\sigma\nu}^\nu)_\rho = (g^{\rho\tau} G_{\tau\sigma})_\rho = G_{\sigma\rho}^\rho . \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma\nu} &= (g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma})_\nu = G_{\sigma\nu}^\nu , \\ g^{\mu\nu} G_{\mu\nu\sigma} &= (g^{\mu\nu} G_{\mu\nu})_\sigma = G_\sigma . \end{aligned}$$

Donc, en tenant compte de (46),

$$2G_{\sigma\nu}^\nu = \frac{\partial G}{\partial x_\sigma} . \quad (47)$$

Telle est l'identité fondamentale de la Mécanique einsteinienne; au fond ce n'est que l'identité de Bianchi *contractée*. Le raisonnement ici employé est encore emprunté à M. A.-E. Harward.