XI. — Compléments sur les B a quatre indices.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Elle a alors exactement même structure que les mineurs des termes de la première ligne dans le déterminant Δ_2 de la seconde formule stokienne fondamentale (3) et ceci est de la plus haute importance; nous verrons bientôt, en effet, que les théories einsteiniennes font reposer les conceptions mécaniques générales sur l'identité (40) et, comme l'électromagnétisme repose sur (3) il y a ici une manière de saisir un des principaux liens unissant les deux disciplines.

Ajoutons que (40) n'est qu'un cas très particulier des « Identités de la Gravifique » récemment réétudiées et réexposées de manière particulièrement didactique par M. Th. De Donder.

XI. — Compléments sur les B a quatre indices.

Par définition et avec le mécanisme des g à deux indices exposé au paragraphe VIII, on a

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = g_{\tau\alpha}\, B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}\,, \qquad B^{\tau}_{\mu\nu\sigma} = g^{\tau\alpha}\, B_{\mu\nu\sigma\alpha}\,. \tag{41}$$

D'après (31) on voit facilement que $B_{\mu\nu\sigma\tau}$ peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{bmatrix}\mu\sigma\\ \tau\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\nu} + \begin{Bmatrix}\sigma\mu\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\nu\\ \tau\end{bmatrix} - \begin{Bmatrix}\nu\mu\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\sigma\\ \tau\end{bmatrix}.$$

Si l'on tient compte de la formule du paragraphe VIII

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix}ik\\ j\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}ij\\ k\end{bmatrix},$$

il vient, toujours pour $B_{\mu\nu\sigma\tau}$, après simplifications

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma\,\partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\tau\,\partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\tau}}{\partial x_\mu\,\partial x_\sigma}\right) + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\tau\\ \alpha\end{bmatrix}.$$

De là résulte

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = -B_{\mu\sigma\nu\tau}\,, \qquad B_{\tau\nu\sigma\mu} = -B_{\mu\nu\sigma\tau}\,, \tag{42}$$

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = B_{\sigma\tau\mu\nu}\,, \qquad B_{\nu\mu\tau\sigma} = B_{\mu\nu\sigma\tau}\,. \tag{43}$$

D'après la définition, encore donnée au paragraphe VIII, pour $G_{\alpha i}$, on a

$$G_{\mu\nu} = g^{\alpha}_{\sigma}\, B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = B^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = g^{\sigma\alpha}\, B_{\mu\nu\sigma\alpha}\,. \tag{44}$$

On conclut de là, d'après la dernière identité (43),

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} . \tag{45}$$

L'expression

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

donne, d'après ce que nous avons vu (§ VI) pour toutes les expressions de même nature,

$$G_\sigma = \frac{DG}{Dx_\sigma} = \frac{\partial G}{\partial x_\sigma} . \tag{46}$$

On sait que G est la *courbure scalaire* pour l'espace dont le ds^2 est

$$ds^2 = g_{ij}\, dx_i\, dx_j .$$

Dans le cas d'une surface ordinaire, G se réduit à la courbure totale.

XII. — Equations gravifiques générales.

Reprenons l'identité de Bianchi, sous la forme (38), et *contractons* la en faisant τ égal à ρ; il vient

$$\left(B^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\right)_\rho + G_{\mu\sigma\nu} - G_{\mu\nu\sigma} = 0 .$$

On conclut de là

$$g^{\mu\nu}\left(B^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\right)_\rho = \left(g^{\mu\nu} B^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\right)_\rho = \left(g^{\mu\nu} g^{\rho\tau} B_{\mu\nu\sigma\tau}\right)_\rho$$
$$= \left(g^{\rho\tau} g^{\mu\nu} B_{\tau\sigma\nu\mu}\right)_\rho = \left(g^{\rho\tau} B^{\nu}_{\tau\sigma\nu}\right)_\rho = \left(g^{\rho\tau} G_{\tau\sigma}\right)_\rho = G^{\rho}_{\sigma\rho} .$$

De même

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma\nu} = \left(g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma}\right)_\nu = G^{\nu}_{\sigma\nu} ,$$
$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu\sigma} = \left(g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}\right)_\sigma = G_\sigma .$$

Donc, en tenant compte de (46),

$$2G^{\nu}_{\sigma\nu} = \frac{\partial G}{\partial x_\sigma} . \tag{47}$$

Telle est l'identité fondamentale de la Mécanique einsteinienne; au fond ce n'est que l'identité de Bianchi *contractée*. Le raisonnement ici employé est encore emprunté à M. A.-E. Harward.