

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1923)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ELLIPTIQUES ET QUARTIQUES BINODALES 1
Autor: Winants, Marcel
Kapitel: §1. — Etude de l'équation $A + B.p'u + C.p''u = 0$.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19735>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

général nous en feront évidemment un grief; notre justification nous sera fournie par feu Pierre Boutroux; dans *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris, 1920, p. 259, ce savant historien nous a fait comprendre tout l'avantage qui peut résulter pour une théorie générale de l'examen préalable d'un cas très particulier.

§ 1. — *Etude de l'équation* $A + B \cdot p'u + C \cdot p''u = 0$.

1. Dans ce premier paragraphe nous envisagerons des fonctions elliptiques tout à fait quelconques : leurs invariants peuvent donc être imaginaires.

Dans l'équation proposée les coefficients A, B, C sont des constantes auxquelles on donnera n'importe quelles valeurs : leurs rapports mutuels constituent deux paramètres dont nous allons disposer dans un instant.

2. Le premier membre de notre équation admet un pôle quadruple $u = 0$. Dans un parallélogramme des périodes il y a donc quatre racines dont la somme est congrue à zéro :

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 . \quad (1)$$

Si l'on écrit que chacune de ces racines vérifie l'équation

$$A + B \cdot p'u + C \cdot p''u = 0 , \quad (2)$$

puis qu'entre les relations identiques trouvées ainsi l'on élimine A, B, C , on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p'u_1 & p'u_2 & p'u_3 & p'u_4 \\ p''u_1 & p''u_2 & p''u_3 & p''u_4 \end{vmatrix} = 0 , \quad (3)$$

et cela nous fournit, entre les quatre racines, deux relations indépendantes des coefficients.

Il est d'ailleurs évident qu'étant donnés quatre arguments différents, tels que deux quelconques d'entre eux ne soient pas homologues, il est à la fois nécessaire et suffisant qu'ils satisfassent aux deux conditions (3) pour qu'on puisse les considérer comme racines d'une certaine équation (2)

3. Nous allons disposer des deux paramètres signalés plus haut [1] de façon que l'équation (2) admette comme racines deux arguments u_1, u_2 , arbitrairement choisis. Et nous allons rechercher les deux autres racines ν, ω . Elles sont déterminées par l'équation (3) qui peut s'écrire comme il suit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p'u_1 & p'u_2 & p'\nu \\ p''u_1 & p''u_2 & p''\nu \end{vmatrix} = 0 . \quad (4)$$

Nous nous proposons de résoudre cette dernière équation.

On développe le déterminant (4) suivant les éléments de la troisième colonne et l'on remplace chaque fonction p'' par $6p^2 - \frac{1}{2}g_2$. On trouve:

$$(p_1^2 - p_2^2) \cdot p'\nu = (p'_1 - p'_2) \cdot p^2\nu + p_1^2 \cdot p'_2 - p_2^2 \cdot p'_1 , \quad (5)$$

où l'on a posé :

$$p_1 = pu_1 , \quad \dots , \quad p'_2 = p'u_2 .$$

On élève au carré pour faire disparaître $p'\nu$, puis on ordonne:

$$\begin{aligned} & (p'_1 - p'_2)^2 \cdot p^4\nu - 4(p_1^2 - p_2^2)^2 \cdot p^3\nu \\ & + 2(p'_1 - p'_2)(p_1^2 \cdot p'_2 - p_2^2 \cdot p'_1) \cdot p^2\nu + g_2(p_1^2 - p_2^2)^2 \cdot p\nu \\ & + p_1^4 \cdot (4p_2^2 - g_2 \cdot p_2) + p_2^4 \cdot (4p_1^2 - g_2 \cdot p_1) - 2p_1^2 \cdot p_2^2(p'_1 \cdot p'_2 + g_3) = 0 . \end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation sera divisé par

$$(p\nu - p_1)(p\nu - p_2) = p^2\nu - (p_1 + p_2) \cdot p\nu + p_1 \cdot p_2 .$$

Si l'on se reporte à l'équation (4), on verra que la division doit être effectivement possible. L'ayant faite, voici le quotient que l'on obtient :

$$\begin{aligned} & (p'_1 - p'_2)^2 \cdot p^2\nu + (8p_1^2 \cdot p_2^2 + p_1 \cdot p_2'^2 + p_2 \cdot p_1'^2 - g_2 \cdot p_1^2 - g_2 \cdot p_2^2 \\ & - g_3 \cdot p_1 - g_3 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p'_1 \cdot p'_2 - 2p_2 \cdot p'_1 \cdot p'_2) \cdot p\nu \\ & + 4p_1^3 \cdot p_2^2 + 4p_1^2 \cdot p_2^3 - g_2 \cdot p_1^3 - g_2 \cdot p_2^3 \\ & - 2g_3 \cdot p_1 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_2 \cdot p'_1 \cdot p'_2 = 0 . \end{aligned} \quad (6)$$

L'équation (6), du second degré par rapport à $p\vartheta$, admet comme racines les deux quantités.

$$p^{\nu} , \quad p^{\omega} ,$$

auxquelles l'équation (5) permet de faire correspondre

$$p'^{\nu} , \quad p'^{\omega} .$$

Le problème est ainsi résolu.

4. Ce qui précède prouve à l'évidence une proposition que nous avons avancée plus haut [2] : les deux conditions (3) sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse considérer quatre arguments comme racines d'une équation de la forme envisagée (2).

5. Nous allons examiner la même équation d'un tout autre point de vue. Il existe, quels que soient les coefficients A, B, C , deux relations remarquables entre les fonctions p des quatre racines.

Mettons l'équation sous la forme suivante :

$$C \cdot p''u + A = -B \cdot p'u .$$

Elevons au carré, exprimons p'' et p'^2 en fonction de p , puis ordonnons :

$$\begin{aligned} & 36C^2 \cdot p^4 - 4B^2 \cdot p^3 + 6C(2A - C \cdot g_2) \cdot p^2 \\ & + B^2 \cdot g_2 \cdot p + A^2 - AC \cdot g_2 + B^2 \cdot g_3 + \frac{1}{4} C^2 \cdot g_2^2 = 0 . \end{aligned} \quad (7)$$

L'équation (7) fournit quatre valeurs de p à chacune desquelles on peut associer d'abord une valeur de p'' , puis par l'intermédiaire de l'équation proposée une valeur de p' , ce qui résout définitivement le problème.

6. Pour les racines algébriques p de l'équation (7), voici les fonctions symétriques fondamentales :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma p_r &= \frac{1}{9} \cdot \frac{B^2}{C^2} , \\ \Sigma p_r \cdot p_s &= \frac{1}{6} \left(2 \frac{A}{C} - g_2 \right) , \\ \Sigma p_r \cdot p_s \cdot p_t &= - \frac{1}{36} g_2 \cdot \frac{B^2}{C^2} , \\ p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 &= \frac{1}{36} \left(\frac{A^2}{C^2} - \frac{A}{C} \cdot g_2 + \frac{B^2}{C^2} g_3 + \frac{1}{4} g_2^2 \right) . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

En comparant la première et la troisième des relations (8), on obtient d'abord :

$$\Sigma p_r \cdot p_s \cdot p_t = -\frac{1}{4} g_2 \cdot \Sigma p_r ,$$

ce qui peut s'écrire :

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} \right) = -\frac{1}{4} g_2 \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) . \quad (9)$$

De la première et de la deuxième des relations (8), on tire ensuite $\frac{B^2}{C^2}$ et $\frac{A}{C}$ respectivement; on substitue dans la quatrième; après quelques simplifications très faciles, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} & 4p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 - g_3(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) , \\ & = (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4 + p_3 \cdot p_4)^2 . \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ces équations (9, 10) ne renfermant pas la fonction impaire p' ne sont évidemment pas suffisantes pour que quatre arguments u_1, u_2, u_3, u_4 , vérifient une équation de la forme proposée.

§ 2. — Une quartique particulière.

7. A partir de ce deuxième paragraphe les invariants g_2, g_3 , des fonctions elliptiques employées seront supposés réels. Nous aurons bientôt à tenir compte du signe du discriminant de ces fonctions :

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 . \quad (11)$$

Nous allons étudier la courbe plane définie en coordonnées rectangulaires par les équations paramétriques :

$$x = p' u , \quad y = p'' u . \quad (12)$$

De ces deux équations, il résulte d'abord qu'une valeur de l'argument u détermine un seul point de la courbe, et que réciproquement, les points multiples éventuels étant exceptés, à tout point de la courbe ne répond qu'un seul argument (à part les valeurs homologues, bien entendu).