

II. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

familles distinctes construite comme les σ_0 (sauf qu'elle n'est pas assujettie à être dénombrable) et qui est telle que tous les σ_0 en sont des segments. Enfin les ensembles de tous les σ_0 forment une famille comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D, ... Par suite, la plus petite famille $\mathcal{H}_c$ est formée des ensembles appartenant à l'un quelconque des termes d'une certaine suite bien ordonnée Σ composée de familles distinctes dont chacune s'obtient en appliquant l'opération U à la famille composée des ensembles des familles précédentes. La décomposition précédente de $\mathcal{H}_c$ permet maintenant de classer les ensembles qui composent cette famille par ordre de complication croissante.

En effet, chacun de ces ensembles, E, appartient aux familles successives de Σ à partir d'un certain rang. C'est ce rang qui fixe le degré de complexité de la construction de E à partir de $\mathcal{H}$. Il faut d'ailleurs distinguer cette complexité de la complexité de l'ensemble E lui-même. Si la famille $\mathcal{H}$ est formée d'ensembles très compliqués, il pourra arriver qu'un ensemble E de classe très élevée soit beaucoup plus simple que les ensembles de $\mathcal{H}$. Mais si au contraire les ensembles de $\mathcal{H}$ sont tous simples, on pourra juger légitimement de la complexité intrinsèque d'un ensemble E de $\mathcal{H}_c$ par le rang du terme de la suite Σ où il apparaît pour la première fois.

Nous remarquerons enfin que dans le cas où les opérations données, S, D, ... ne portent à chaque fois que sur un nombre fini d'ensembles, la suite Σ si elle n'est pas finie est formée d'une suite de familles de rangs finis, de sorte que dans ce cas les classes des ensembles de $\mathcal{H}_c$ déduits de $\mathcal{H}$ sont toutes repérables par des nombres entiers.

II. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint.

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles quelconque est dite *additive au sens restreint*, si E_1, E_2 étant deux quelconques des ensembles de la famille $\mathcal{F}$, les ensembles $E_1 + E_2, E_1 - E_2$ appartiennent aussi à la famille $\mathcal{F}$.

On peut alors dire que la famille $\mathcal{F}$ est *close par rapport aux opérations* d'addition et de soustraction de deux ensembles et appliquer à ces opérations particulières les considérations que l'auteur a développées plus haut concernant celles des opérations les plus générales qui ne portent à chaque fois que sur un nombre fini d'ensembles.

Il s'agit, étant donnée une famille $\mathcal{C}$, entièrement arbitraire, d'ensembles quelconques, de déterminer une famille comprenant les ensembles de $\mathcal{C}$ et close par rapport aux opérations d'addition et de soustraction de deux ensembles.

D'après ce qui précède, on peut construire la plus petite, $\mathcal{C}_r$, de ces familles de la façon suivante: on formera $\mathcal{C}_r$ au moyen de tous les ensembles obtenus chacun comme résultat final d'un nombre fini d'additions et de soustractions de deux ensembles, ces opérations ayant lieu successivement et portant à chaque fois sur des ensembles appartenant soit à $\mathcal{C}$ soit aux ensembles formés dans les opérations antérieures.

D'après le premier mode de construction indiqué, chaque ensemble E de $\mathcal{C}_r$ s'obtient par un nombre fini d'additions et de soustractions qui sont bien effectués à partir de la famille $\mathcal{C}$, mais qui évidemment ne font intervenir, pour un ensemble E déterminé de $\mathcal{C}_r$, qu'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{C}$: $G_1, G_2, \dots G_n$. Soit $((G_1, \dots G_n))$ la plus petite famille additive au sens restreint qui comprend les ensembles $G_1, \dots G_n$ de $\mathcal{C}$; on voit qu'elle comprend E et est comprise dans $\mathcal{C}_r$. Donc:

$$\mathcal{C}_r = \mathcal{C} + \mathcal{C}^{(2)} + \dots + \mathcal{C}^{(n)} + \dots$$

$\mathcal{C}^{(n)}$ étant la famille composée des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $((G_1, \dots G_n))$ pour n donné.

On est donc ainsi ramené au cas particulier où $\mathcal{C}$ est composé d'un nombre fini d'ensembles, puisque si l'on sait construire les familles $((G_1, \dots G_n))$, on saura construire $\mathcal{C}_r$.

Or si les ensembles $G_1, \dots G_n$ étaient *disjoints*, c'est-à-dire sans élément commun à deux d'entre eux, la famille $((G_1, \dots G_n))$ serait évidemment constituée des ensembles qui sont chacun somme d'un nombre fini des $G_1, \dots G_n$. Pour ramener à ce cas il suffit d'introduire la considération de ce que nous appellerons les

atomes du système $G_1, \dots, G_n$. Dans la suite d'additions et de soustractions à partir des $G_1 \dots G_n$, qui sert à former un ensemble quelconque de $((G_1, \dots, G_n))$, les ensembles obtenus successivement resteront formés d'éléments des G , par conséquent tout ensemble de $((G_1, \dots, G_n))$ appartient à $G = G_1 + \dots + G_n$. En posant $G'_1 = G - G_1, \dots, G'_n = G - G_n$, on voit que les égalités

$$G = G_1 + G'_1, \dots, G = G_n + G'_n$$

représentent ce que l'on peut appeler des découpages de G . Si on combine à la fois tous ces découpages, on divise G en 2^n sous-ensembles au plus — certains pouvant être nuls —, ensembles disjoints deux à deux et que nous appellerons les *atomes* du système $G_1, \dots, G_n$.

On voit facilement que chaque atome s'obtient à partir de ce système par une suite convenable de *soustractions* seulement. Finalement, on voit qu'il existe un nombre fini d'ensembles — les atomes — déduits de $G_1 \dots G_n$ chacun par une certaine suite convenable de soustractions et tels que $G_1, \dots, G_n$ soient chacun somme d'un nombre fini d'atomes disjoints.

Alors il est manifeste que les atomes appartiennent à la famille $((G_1, \dots, G_n))$ et que cette famille est constituée des ensembles qui sont sommes d'un nombre fini d'atomes disjoints.

On peut aussi en déduire une autre construction de la famille $\mathcal{A}_r$ dans le cas d'une famille $\mathcal{A}$ quelconque. Appelons système moléculaire attaché à $\mathcal{A}$, le système $\mathcal{M}$ formé des ensembles qui sont atomes pour l'un au moins des groupements formés d'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{A}$.

On voit alors que la famille $\mathcal{A}_r$ sera constituée des ensembles qui sont sommes d'un nombre fini de molécules disjointes. Ceci montre en passant que dans la construction d'un ensemble quelconque de $\mathcal{A}_r$ par un nombre fini d'additions et de soustractions à partir de $\mathcal{A}$, on peut toujours supposer que les soustractions ont toutes été placées en tête. Ceci montre aussi que pour former la plus petite famille $\mathcal{A}_r$ additive au sens restreint et comprenant $\mathcal{A}$, on peut former d'abord la plus petite famille comprenant $\mathcal{A}$ et close par rapport à la soustraction et ensuite obtenir $\mathcal{A}_r$ comme la plus petite famille close par rapport à

l'addition de deux ensembles et comprenant la famille qu'on vient de former.

Il pourra aussi être utile de remarquer que si une famille d'ensembles, $\mathcal{H}$, est telle que la différence de deux de ses ensembles est la somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{H}$, la famille $\mathcal{H}_r$ est constituée par tous les ensembles qui sont sommes d'un nombre fini d'ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{H}$. (On est conduit à envisager le cas actuellement considéré si l'on remarque que le système moléculaire attaché à une famille quelconque jouit lui-même de cette propriété.)

En vue de mesurer le degré de complexité de chacun des ensembles de $\mathcal{H}_r$, on commencera par appeler $U\mathcal{H}$ l'opération qui consiste à adjoindre à une famille $\mathcal{H}$ les ensembles qui sont différences de deux ensembles de $\mathcal{H}$, puis à adjoindre à la famille ainsi formée les ensembles qui sont sommes de deux des ensembles de cette seconde famille.

Ceci fait, on formera les familles

$$\mathcal{H}, \quad U\mathcal{H}, \quad U(U\mathcal{H}), \quad \dots$$

et en général la famille qu'on peut désigner par $U^{(n)}\mathcal{H}$ et qui résulte de l'opération U répétée n fois à partir de $\mathcal{H}$. Alors: ou bien à partir d'un certain rang p les $U^{(n)}\mathcal{H}$ sont identiques à $U^{(p)}\mathcal{H}$ et $U^{(p)}\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_r$; ou dans le cas contraire $\mathcal{H}_r$ est formé des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $U^{(n)}\mathcal{H}$; autrement dit

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H} + U\mathcal{H} + \dots + U^{(n)}\mathcal{H} + \dots$$

On voit alors qu'on pourra distinguer dans $\mathcal{H}_r$ des ensembles de classe 0, 1, 2, ..., n , ..., la classe étant toujours déterminée par un rang entier. Bien entendu, il pourra arriver que le nombre des classes soit fini si les $U^{(n)}\mathcal{H}$ sont identiques à partir d'un certain rang.

III. — Construction des familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens complet.

1. *Définitions.* — Appelons *ensemble limite restreint* d'une suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ l'ensemble R des