Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zurich ; *Université*. — FUETER : Einführung in die mathem. Behandlung der Naturwissenschaften, 3 ; Uebgn., 1 ; Theorie der automorphen Funktionen, 4 ; Mathem. Seminar mit Prof. Speiser, 1. — SPEISER : Differential- und Integralrechnung, I, 4 ; Galois'sche Theorie der algebraischen Gleichungen, 3 ; Uebgn., 1. — WOLFER : Einleitung in der Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ; Bahnbestimm. v. Planeten u. Kometen, 2.

Privat-docents : GONSETH : Angew. Mathematik, 4. — BERNAYS : Mengenlehre, 3.

Zurich ; *Ecole polytechnique fédérale, section normale*. — HIRSCH : Höh. Mathematik I, 6 ; Repet., 1, Uebgn., 2 : III, 3 ; Uebgn., 1. — FRANEL : Mathématiques supérieures, I, 6 ; Répét., 1 ; Exercices, 2 ; III, 3 ; Exercices, 1. — GROSSMANN : Darstell. Geometrie, 4 ; Repet., 1, Uebgn., 4 ; Projekt. Geometrie, 4. — WEYL : Analyt. Geometrie, 2 ; Uebgn., 1. — KOLLROS : Géométrie descriptive, 4 ; Répét., 1 ; Exerc., 4. — MEISSNER : Mechanik II, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2. — HURWITZ : Ellipt. Funktionen, 4 ; Höhere Zahlentheorie, 2. — HURWITZ u. KOLLROS : Math. Seminar, 2. — WEYL : Theorie des elektromagn. Feldes, 4 ; Integralgleichungen, 2. — MEISSNER : Schwingungs- u. Wellenbewegungen, 2. — BÆSCHLIN : Vermessungskunde ; Höh. Geodäsie, 3 ; Repet., 1. — WOLFER : Einleitung in die Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ; Bahnbestimmungen von Planeten u. Kometen, 2. — AMBERG : Math. der Pensionsversicherung, 2. — BRANDENBERGER : Einführung in den math. naturw. Unterricht I, 2. — PÓLYA : Einf. in die Analysis reeller Grössen, 2. — KIENAST : Analyt. Mechanik, 2.

Cours libres. — AMBERG : Mathem. der Pensionsversicherung, 2. — BEYEL : Rechenschieber mit Uebgn., 1 ; Darstellende Geometrie, 2 ; Kegelschnitte, 1. — BRENTANO : Elektronentheorie auf optischem u. elektrischem Gebiet, 2. GONSETH : Questions choisies de mathématiques appliquées, 2 ; Die Fläche 3. Grades, 1. — J. KELLER : Ausgewählte Kapitel der darstellenden Geometrie, 2 — KRAFT : Die Grundkräfte der Welt, 1 ; Geometrische Analysis, 3 ; Kinetik, Bewegung materieller Systeme unter der Wirkung von Kräften, 3. — PÓLYA : Geometrische Anwendungen der Funktionentheorie, 2.

BIBLIOGRAPHIE

Emile BOREL. — **Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe**, rédigées par Gaston Julia. (Collection E. Borel.) — 1 vol. gr. in-8° de XII-164 p. ; Prix : 7 fr. 50. Gauthier-Villars, Paris, 1917.

On peut, dans ce nouveau volume, distinguer au moins deux grandes idées. La première consiste en ce qu'il est possible de trouver, à partir des séries entières et en liaison étroite avec celles-ci, des représentations d'une fonction monogène qui ignorent les frontières infranchissables pour les séries entières elles-mêmes. La seconde consiste en la possibilité de construire des fonctions monogènes *non analytiques*, c'est-à-dire des fonctions

d'une variable complexe dont l'existence n'est appuyée, en aucune région du champ complexe, sur l'existence d'un développement taylorien, cette existence même étant une impossibilité à cause du caractère partout dense de l'ensemble des singularités de la fonction.

Combien de telles thèses auraient semblé audacieuses il y a seulement une dizaine d'années ! Elles dépassent d'une manière étonnante le point de vue de Weierstrass, pour lequel il n'y avait pas de fonction analytique sans série entière convergeant quelque part dans un cercle, mais elle ne dépasse nullement celui de Cauchy, sinon par de nouveaux développements et de nouvelles précisions, dont les intégrales définies, prises suivant les contours tracés dans le champ complexe, s'accomodent parfaitement.

M. Borel a d'abord dû perfectionner la théorie des ensembles de mesure nulle, ensembles qui ont la puissance du continu et se construisent à partir de points fondamentaux formant un ensemble dénombrable. Ainsi l'ensemble des points à coordonnées rationnelles est dénombrable et d'ailleurs dense dans tout le plan. Mais, en parlant un langage sommaire et rapide, je puis dire qu'autour de tout point rationnel il y a une infinité continue de points irrationnels.

On conçoit maintenant que, à une variable z, puisse, dans de tels ensembles, correspondre une fonction $f(z)$ ayant pour points singuliers les points fondamentaux dont la densité empêchera l'existence de tout développement taylorien.

De même — et c'est le sujet traité en premier lieu par M. Borel — on peut imaginer que des séries de polynomes, valables dans tout le champ d'existence d'une fonction monogène à points singuliers en nombre infini et d'abord isolés (telle une fonction méromorphe), soient encore valables quand ces points, sans cesser de former un ensemble dénombrable, viennent se ranger en ensemble dense sur une certaine ligne singulière, qui de ce fait ne constitue en rien un empêchement au prolongement appuyé sur la série de polynomes considérée.

Et les séries de polynomes ainsi invoquées sont généralement constructibles par polynomes extraits d'une seule et même série entière. On voit donc que Weierstrass, tout en ne disant que des choses dont l'existence ne saurait être contestée, montrait qu'il les voyait d'une manière rigoureuse mais étroite ou tout au moins spéciale. La série entière a une souplesse que le géomètre allemand n'a pas complètement mise en évidence ; ce qui est obstacle pour elle, quand on veut ne la voir que sous une forme intangible, cessera de l'être si l'on groupe ses termes, suivant des lois nouvelles, de manière à en faire de certaines séries de polynomes.

Je crois en avoir assez dit pour montrer le très grand intérêt de ces *Leçons*, fort bien rédigées d'ailleurs par M. Gaston Julia. Félicitons-nous aussi de ce que MM. Borel et Julia, en prenant tous deux une part active à la guerre, aient cependant pu trouver le temps de mettre au jour cette nouvelle publication si propre à montrer la fécondité des conceptions de l'école française créée par Cauchy.

A. Buhl (Toulouse).

Ernest Flamard. — **Calcul des systèmes élastiques de la construction** (*Encyclopédie industrielle* fondée par C. Lechalas). — 1 vol. gr. in-8°, de vii-200 p., avec 171 fig. ; 12 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1917.

L'auteur établit le calcul des systèmes élastiques de la construction en

partant de la notion de travail de déformation. Dans le *Livre premier*, il donne l'étude des théorèmes fondamentaux relatifs aux dérivées et au minimum de travail de déformation. Il en tire ensuite des règles pratiques pour la résolution des problèmes d'application concernant les poutres droites, les poutres courbes et les systèmes articulés, qui font l'objet des livres II, III et IV.

M. Flamard a résumé dans la *Préface* le point de vue auquel il se place pour établir ces principes fondamentaux. En voici le principal passage :

« Les principes fondamentaux, théorèmes des dérivées du travail et du travail minimum de déformation sont dus au célèbre ingénieur italien Alberto Castigliano. Nous avons établi ces principes généraux d'après le mode d'exposition adopté au cours de notre Thèse sur les *Méthodes nouvelles de la statique des constructions*, nous inspirant par ailleurs des beaux résultats théoriques mis en évidence par M. Bertrand de Fontviollant dans son remarquable Mémoire sur les *Déformations élastiques des pièces et systèmes de pièces à fibres moyennes planes ou gauches.* »

« L'application systématique des principes généraux dont il s'agit, à la recherche des déplacements élastiques absolus et à celle des efforts de liaisons surabondantes, met en jeu les seules dérivées premières du travail de déformation et conduit à des calculs basés sur la simple notion d'intégrale définie, susceptible d'évaluation à la fois graphique et analytique. La méthode du travail de déformation est ainsi caractérisée par la généralité, la précision et la sûreté de son emploi dans l'étude complète et rigoureuse des systèmes élastiques de la construction. Dès lors, au moins équivalente aux procédés ordinaires de calculs fondés sur la géométrie des déformations, relativement aux questions usuelles, la méthode préconisée leur est nettement supérieure dans l'examen et la résolution des nombreux problèmes complexes qu'envisage la théorie de la résistance des matériaux. »

Cet ouvrage apporte une intéressante contribution à l'étude théorique et pratique de la résistance des matériaux.

Œuvres de Charles Hermite, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par Emile Picard. Tome IV. — 1 vol. gr. in-8°, de 596 p. ; avec 2 planches, reproduction de la médaille du Jubilé d'Hermite et un fac-similé de lettre ; 25 fr. Librairie Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1917.

Ce volume forme le quatrième et dernier des Œuvres de Charles Hermite. Les mathématiciens sauront gré à M. Picard, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, d'avoir pu terminer cette publication, malgré les difficultés de toutes sortes, dues aux circonstances actuelles.

Le Tome IV contient les travaux publiés de 1880 à 1901, année de la mort d'Hermite. Ils sont consacrés, pour la plupart, à la théorie des fonctions elliptiques et à leurs applications. Mais on y trouve aussi des mémoires fondamentaux sur les fonctions eulériennes, la théorie des nombres, les polynomes de Legendre, les fractions continues, les fonctions analytiques, etc.

Ce volume renferme en outre des notices biographiques et des discours prononcés par Hermite dans diverses occasions. « Plusieurs de ces pages, dit M. Picard dans l'Avertissement, sont d'un haut intérêt, non seulement au point de vue scientifique, mais parce qu'elles jettent quelque jour sur la

personnalité si originale d'Hermite. Elles sont à rapprocher des lettres d'Hermite à Stieltjes publiées antérieurement, où, à côté du géomètre, apparaît souvent l'homme. On doit d'ailleurs considérer que cette correspondance[1], remarquable à tant de titres, fait partie des Œuvres complètes d'Hermite, comme les quatre Volumes dont nous terminons aujourd'hui la publication. »

L'œuvre du savant géomètre se trouvait dispersée dans un grand nombre de périodiques français et étrangers. Réunie avec beaucoup de soin par M. Picard, elle grandit singulièrement, et forme maintenant un précieux instrument de travail pour les mathématiciens. Ainsi que le remarque la Préface du Tome I, les mémoires d'Hermite sont courts, à peu d'exceptions près. « La marche générale des idées y est toujours mise avec évidence ; mais, surtout dans la première partie de la carrière d'Hermite, la rédaction se présente sous une forme synthétique, et le soin d'établir de nombreuses propositions intermédiaires, dont l'énoncé seul est indiqué, est laissé à la charge du lecteur. Quel fructueux exercice que la lecture d'un de ces Mémoires fondamentaux pour l'étudiant bien doué qui cherche à en rétablir tous les détails. »

H. F.

L. Kollros. — **Géométrie descriptive.** — 1 vol. p. in-8° de VIII-154 p., avec 170 fig. ; relié 5 fr. ; Orell Füssli, Zurich, 1918.

Ce *Précis* donne un exposé clair et concis des principes fondamentaux de la Géométrie descriptive, depuis les premiers éléments jusqu'à la photogrammétrie et à la résolution graphique des équations linéaires. C'est un *résumé* du cours professé par l'auteur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, où il est complété par de nombreux exercices théoriques et pratiques.

Nous pouvons nous borner à donner un tableau des matières contenues dans ce volume qui est appelé à rendre de grands services aux étudiants. Il comprend quatorze chapitres :

I. Projection cotée. — II. Affinité. — III. Méthode de Monge. — IV. Axonométrie. — V. Homologie. Coniques. — VI. Cônes et cylindres. — VII. Sphère. — VIII. Surfaces de révolution. — IX. Surfaces réglées. — X. Surfaces développables. — XI. Hélices et hélicoïdes. — XII. Projection centrale. — XIII. Cartes géographiques. — XIV. Géométrie descriptive à n dimensions.

Ajoutons que l'auteur utilise la notation, généralement en usage en Suisse, et qui consiste à représenter les points par des lettres majuscules, A, B, C, ..., les droites par des petites lettres a, b, c, ... et les projections par les mêmes lettres affectées d'un indice, A_1, A_2, A_3 ; B_1, ... C_3 ; a_1, a_2, a_3 ; b_1, ... c_3, ...

H. F.

Edm. Landau. — **Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale.** — 1 vol. in-8°, 143 p. ; 6 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce petit livre de 143 pages est formé de deux parties bien différentes. La première constitue une introduction à la théorie des nombres algé-

[1] Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, 2 volumes, Paris, 1905 *(Réd.)*.

briqués. L'auteur s'y propose essentiellement de démontrer par le plus court chemin le théorème fondamental de Dedekind sur la décomposition univoque d'un idéal en idéaux premiers. Pour lire les 50 pages qu'elle contient, il suffit de connaître qu'un nombre ordinaire est décomposable d'une seule manière en nombres premiers, qu'une équation algébrique de degré n a n racines et qu'une fonction rationnelle symétrique s'exprime comme fonction rationnelle des fonctions symétriques élémentaires, toutes connaissances qu'un étudiant acquiert dans sa première année d'études universitaires. La seconde partie se propose de faire connaître aux mathématiciens les résultats les plus importants de la théorie analytique des idéaux, en particulier le théorème que dans tous les corps algébriques il y a asymptotiquement le même nombre d'idéaux premiers. L'auteur avait déjà exposé cette théorie jadis dans son Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Depuis lors, la découverte importante de Hecke que la fonction $\zeta_K(s)$ relative à un corps algébrique K quelconque est prolongeable analytiquement dans tout le plan et satisfait à une équation fonctionnelle simple permet de retrouver d'une manière différente les anciens résultats de la théorie et d'obtenir de nouveaux résultats. Aussi le commencement de la deuxième partie est-il consacré à la démonstration du théorème de Hecke. La lecture de la seconde partie ne suppose aucune autre connaissance préalable que celle de la première partie et celle des éléments de la théorie des fonctions analytiques.

On retrouve dans cet ouvrage toutes les qualités de rigueur, de clarté et de précision qui distinguent les travaux antérieurs de M. Landau. En particulier, il ne semble guère possible de ramener à plus de concision la première partie du livre. Rien ne s'y trouve démontré, qui ne soit nécessaire pour la suite et tout ce qui n'est pas nécessaire est élagué. Ce souci de simplification est peut-être poussé trop loin à quelques endroits et risque alors de rendre plus difficile une vue d'ensemble de la théorie.

A noter la composition typographique très soignée ; aucune table d'errata n'accompagne le livre et je n'ai rencontré, à la lecture, aucune faute typographique.

M. Plancherel (Fribourg).

L. Lecornu. — **Cours de Mécanique,** professé à l'Ecole Polytechnique. Tome III. — 1 vol. gr. in-8° de IV-670 pages ; 25 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1918.

Le troisième volume du *Cours* de M. Léon Lecornu traite de la Mécanique appliquée. Le savant auteur, dans une courte préface, n'ose se flatter d'avoir su passer, sans heurt, de la Mécanique rationnelle des deux volumes précédents, aux applications appuyées sur des formules empiriques. Cependant il suffit de parcourir la première partie du présent livre, consacrée à la résistance des matériaux, pour être complètement rassuré sur la solidité et l'élégance de la transition. Après avoir rappelé la statique rationnelle, particulièrement sous la forme graphique qui relève aussi du Cours de Géométrie de l'Ecole, il entre dans le vif du sujet en étudiant les relations entre efforts et déformations relatifs aux solides. Il sépare soigneusement les résultats empruntés à la théorie de l'élasticité des résultats pratiques venant les simplifier. Dans le même ordre d'idées il n'y a pas que la théorie élastique qui donne quelque chose ; le simple théorème du travail virtuel a été

remarquablement combiné, par M. Bertrand de Fontviolant, avec les principes de la résistance des matériaux.

D'ailleurs, si l'on examine quelques problèmes particuliers (poutres encastrées, posées sur appuis, etc.) on est frappé de la simplicité avec laquelle, par l'intermédiaire d'équations linéaires, on retrouve la plupart des théories de Saint-Venant. Je conseillerai presque d'étudier d'abord ces questions simplifiées à qui voudrait s'occuper ensuite d'élasticité rationnelle ; et le conseil serait vraisemblablement d'accord avec l'ordre historique. Les équilibres élastiques de l'anneau, des ressorts en lames, en spirales, en hélices, sont des questions à propriétés géométriques. L'équilibre d'une plaque est beaucoup plus difficile mais devient cependant relativement abordable, par des moyens élémentaires, de par une certaine manière approchée de tenir compte des conditions au pourtour. Le *flambement* ne va pas sans des considérations de courbure d'où proviennent encore des équations linéaires très simples quand le phénomène tend à se produire après de petites déformations.

Les systèmes *hyperstatiques*, c'est-à-dire surabondamment équilibrés, ont une théorie véritablement grandiose. Le principe du travail minimum est, pour eux, ce que le principe du travail virtuel est pour les systèmes de la statique rationnelle. Les systèmes réticulaires, les poutres à plus de deux appuis illustrent facilement le principe général.

L'équilibre des massifs de terre a été surtout étudié par M. Boussinesq qui (*Comptes rendus*, 1918) poursuit toujours une telle étude. Il l'appuya dès l'abord sur un potentiel logarithmique spécial. On y rencontre d'intéressantes familles de courbes le long desquelles, par exemple, l'éboulement tend à se produire et, dans les cas les plus simples, les murs de soutènement se peuvent étudier par des lois analogues à celles s'appliquant aux digues.

Enfin, à ces questions statiques s'adjoignent, dans des circonstances généralement peu souhaitées mais qu'il faut justement savoir prévoir, certains faits dynamiques. Un système destiné à l'équilibre peut être ébranlé par un choc ; les vibrations des barres nous ramènent notamment aux équations aux dérivées partielles ainsi qu'aux fonctions arbitraires et aux séries de solutions simples qui y satisfont. Une très forte pression, qu'on peut se représenter de manière statique, peut entraîner (effet dynamique) l'écrasement d'un *crusher ;* on mesure ainsi la force d'expansion d'un explosif et voilà la résistance des matériaux rattachée à des questions de balistique intérieure. L'étendue n'y manque pas plus que l'originalité.

L'Hydraulique, image simplifiée de l'Hydrodynamique, a des équations et des explications approchées qui ne vont pas non plus sans quelque élégance. C'est ce que l'on pourrait dire du mouvement régularisé par vitesses moyennes, du théorème de Bernoulli complété pour le cas d'un fluide visqueux et surtout d'un cas simple, d'abord traité par M. Boussinesq, où l'on explique l'apparition des tourbillons par la discussion de l'intégrale d'une simple équation différentielle linéaire. Les premiers problèmes particuliers ont trait aux écoulements par des orifices de formes diverses puis par les déversoirs. Viennent ensuite les pertes de charge par modification brusque du diamètre ou de la direction d'une conduite, les pertes lentes dans les longs tuyaux et le phénomène si curieux et parfois si désastreux du *coup de bélier*. Celui-ci dépend d'une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique, tout à fait analogue à l'équation des cordes vibrantes et

s'intégrant, au premier abord, de la même manière ; mais les circonstances accessoires sont nombreuses et compliquées. La présence de poches d'air dans la conduite, loin d'amortir le phénomène, ne fait souvent que l'exciter. Dans un canal, des phénomènes plus ou moins comparables peuvent être observés ; ce sont le *ressaut*, d'abord immobile mais transformable en ondes de translation, puis l'onde solitaire dont le profil a encore d'intéressantes propriétés géométriques. Quant aux ondes d'oscillation, qui ne sont jamais isolées, leur étude se ramène assez aisément à celle des mouvements oscillatoires les plus simples c'est-à-dire aux mouvements harmoniques.

La Pneumatique reprend, pour les gaz, les questions déjà examinées pour les liquides ; les écoulements gazeux ne diffèrent des écoulements liquides que par la présence d'intégrales prêtes à disparaître, en s'explicitant, pour le cas où l'on reviendrait à l'incompressibilité. A signaler ici de curieuses et simples formules, dues, je crois, à Haton de la Goupillère, pour le temps nécessaire au remplissage d'un récipient mis en communication avec un autre où la pression est maintenue constante. Notons encore l'étude des conditions thermiques dans lesquelles une colonne gazeuse pourrait présenter des ondes permanentes analogues à l'onde solitaire liquide puis les ondes coniques qui suivent un bateau à marche suffisamment rapide ou un projectile marchant plus vite que le son ; ce sont des ondes singulières, enveloppes de familles d'ondes, qui produisent le *claquement* perçu le long de la trajectoire d'une balle.

La résistance de l'air, d'une étude si nécessaire pour la balistique et l'aviation, présente d'étranges paradoxes. Un cylindre circulaire, tournant rapidement autour de son axe et placé dans un courant d'air, a un déplacement possédant une composante perpendiculaire au courant. Certaines plaques pouvant tourner autour d'une normale fixe ont leur rotation entretenue par un courant d'air également normal, ce qui semble invraisemblable par raison de symétrie. L'esprit scientifique simplement curieux peut, à coup sûr, se passionner autant que le technicien pour de semblables questions.

Une remarque tout à fait analogue à cette dernière peut être faite au début de la Thermodynamique. M. Lecornu nous avertit qu'il va être bref et qu'il n'a en vue que ce qui est nécessaire pour la théorie des moteurs thermiques, mais, heureusement, il ne tient pas sa promesse de manière étroite. Je relève des paragraphes d'un extrême intérêt sur les parties quasi-philosophiques de la Thermodynamique. On sait que, dans les transformations réversibles, l'inverse de la température est un facteur intégrant pour la variation infinitésimale de la quantité de chaleur d'où, par intégration alors possible, la fonction *entropie*. Cela peut-il s'expliquer de manière purement mécanique ? M. Lecornu s'en rapporte ici, très élégamment et très brièvement, à Helmholtz, à Lord Kelvin et à Henri Poincaré qui a recherché la nature des mouvements tourbillonnaires n'altérant pas l'existence d'une entropie.

Dans les cycles relatifs aux fluides homogènes on rencontre d'abord ceux dont l'aire mesure le travail ; l'idée de conserver cette représentation entraîne la constitution de diagrammes entropiques pour lesquels on retrouve, sous sa forme générale, le problème bien connu de la conservation des aires planes. D'ailleurs, ces équivalences de mailles constituent une clef intuitive quant aux formules subséquentes.

L'équation caractéristique des gaz parfaits peut être rattachée à la théorie

du viriel ; cette équation et les formules relatives aux diverses transformations de ces gaz subissent des modifications qui, autant que possible, conservent leur aspect quand on passe aux gaz réels. C'est une question de termes complémentaires sur lesquels les physiciens n'ont pas toujours été d'accord ; l'approximation la meilleure est généralement du côté des formules simples.

L'étude des vapeurs saturées est riche en résultats géométriques asymptotiques à ceux concernant les gaz parfaits ; Joseph Bertrand a même étudié ainsi les propriétés qui subsistent dans le voisinage de la saturation. Les écoulements des fluides élastiques sont maintenant repris en tenant compte des phénomènes thermiques ; la relation entre la vitesse d'écoulement d'une vapeur et la température correspond encore à un certain cycle dont l'aire figure la variation de force vive. Signalons, à ce sujet, les si curieux compteurs de vapeur basés sur l'écoulement de celle-ci au travers de certains ajutages. La propagation d'une onde plane demande aussi à être complétée au point de vue thermique ; le complément prend naturellement une importance toute particulière quand il s'agit de la propagation des flammes, des ondes de déflagration et d'explosion ; là encore les schèmes géométriques gardent leur curieuse simplicité intuitive.

Dans les généralités relatives aux machines, de nombreuses pages sont consacrées à deux organes essentiels : le volant et le régulateur. On connaît, à coup sûr, leurs rôles distincts, mais que de choses intéressantes à noter quant aux différents cas ou aux différents dispositifs imaginés par des techniciens ou constructeurs ingénieux. Il y a des volants élastiques avec masses portées par des ressorts, d'où, pour l'ensemble, un moment d'inertie variable ; il y a les hélices des avions, pour lesquelles le couple résistant est fonction non d'un déplacement angulaire mais d'une vitesse angulaire. Pour les régulateurs la diversité est plus grande encore ; ils ont une théorie géométrique en tant que systèmes articulés, ils utilisent la pesanteur ou des ressorts, ils deviennent isochrones quand ils tendent à ramener une machine à une vitesse angulaire toujours la même et peuvent alors être réalisés par une des plus simples propriétés de la parabole à axe vertical. Ils ont aussi une théorie statique et dynamique indépendante de leur forme et susceptible d'une interprétation graphique ; tantôt le régulateur tend à modifier les régimes d'une manière asymptotique interprétable par le parcours d'une sorte de spirale, tantôt il détermine un régime cyclique traduisible sur des courbes fermées ou *cycles*. Il y a aussi des régulateurs d'inertie, des régulateurs-volants, curieux petits monstres qui semblent vouloir vivre de la vie de deux organes que la théorie s'attache généralement à bien séparer.

Les freins peuvent être envisagés aussi à des points de vue fort divers. Tantôt ils absorbent de l'énergie qu'il s'agit de détruire, tantôt de l'énergie qu'il s'agit de mesurer (frein de Prony) ; ils reposent sur des frottements généralement solides, parfois liquides, comme dans les pièces d'artillerie dont il faut amortir le recul, parfois aériens dans les moulinets dynamométriques.

Enfin la question des efforts intérieurs, dans une machine, ne peut évidemment être tranchée par le seul théorème des forces vives suffisant, pour l'ensemble du mouvement considéré du point de vue de la dynamique rationnelle. Il y a ici une question analogue à celle des systèmes hyperstatiques avec cette complication qu'il s'agit de forces appliquées à des corps en mouvement ; M. Lecornu s'attache à traiter des cas dont l'élégance est d'au-

tant moins contestable qu'on peut, toujours et encore, l'appuyer sur de remarquables constructions géométriques.

Je ne ferai que signaler les moteurs hydrauliques roues et turbines, rappelant que la turbine est peut-être due à Euler et présente aussi sa curieuse géométrie. Le bélier hydraulique, utilisant la surpression du coup de bélier, est vraiment un appareil étonnant et même de première apparence paradoxal ; M. Lecornu lui consacre un schème très simple.

Quant aux moteurs thermiques je serai également bref, signalant surtout le cas de la combustion interne qui nous a valu l'automobile, le sous-marin (moteur Diesel) et l'avion. Et justement des notions d'aviation terminent ce bel et grand ouvrage ; j'y relève la question de la stabilité automatique dédaignée par les pilotes mais non par les techniciens justement excités par la difficulté du problème.

Peu importe quelques citations de plus ; le troisième volume de M. Lecornu termine magnifiquement un Cours de Mécanique qui doit pouvoir atteindre à toutes les applications et qui y atteint effectivement par la combinaison la plus sûre des formules rationnelles et des tracés expérimentaux, non sans l'intuition profonde, et toujours exprimée avec le maximum d'élégance, de la géométrie et de la physique des faits.

Encore un beau guide pour les jeunes qui demain reconstruiront la France.

A. Buhl (Toulouse)

Maurice d'Ocagne. — **Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique.** — Tome II : Cinématique appliquée. Stéréotomie. Statique graphique. Calcul graphique. Calcul grapho-mécanique. Nomographie. — 1 vol. gr. in-8° de 364 pages ; 18 fr. ; Paris, Gauthier-Villars, 1918.

L'Enseignement mathématique, dans le présent volume (p. 30), a consacré un article de fond à deux grands traités de géométrie, publiés à la même époque et destinés à faire grande sensation dans l'enseignement ; l'un était dû à Gaston Darboux, l'autre à M. d'Ocagne, dont l'œuvre s'achève aujourd'hui en un second volume complétant surtout le premier au point de vue des applications.

Ce tome II débute par la Cinématique appliquée ; le souci d'être méthodique et moderne s'y révèle de prime abord, ne serait-ce qu'en ne traitant des divers transformateurs de mouvement qu'après un rappel d'une classification générale des mécanismes due à M. G. Kœnigs. Je me permets de passer sur les divers types d'engrenages, mais je note les élégances propres aux trains épicycloïdaux susceptibles notamment d'associer des rotations très différentes sans que la cause de cette différence soit immédiatement apparente (paradoxe de Fergusson). Les transformateurs de rotations à vitesses variables nous font retrouver des courbes roulantes quelconques, mais avec constructions intermédiaires particulières au sujet ; on construit les profils roulants en partant de courbes dont les abscisses doivent s'enrouler sur des circonférences, ce qui est l'occasion de faire usage d'une construction approchée concernant la quadrature du cercle.

Toutefois le plus grand intérêt apparaît avec les transformateurs géométriques. Les plus simples sont des quadrilatères, dont un côté est invariable, ou *trois-barres* ; on peut leur rattacher le transformateur de Watt donnant la courbe à longue inflexion, c'est-à-dire la solution *approchée* de la transformation *sans guidage* du mouvement circulaire en mouvement

rectiligne. Il est fort intéressant de constater que cette *approximation* peut être perfectionnée par divers et même par une infinité de dispositifs jusqu'à ce que l'on aboutisse à la solution rigoureuse du problème, donnée par les inverseurs. Et comme un point d'un segment glissant, par ses extrémités, sur deux droites décrit une ellipse, le fait de savoir passer du mouvement circulaire au mouvement rectiligne entraîne que l'on sait passer aussi au mouvement elliptique de l'ellipsographe de Hart. Les systèmes articulés gauches ont pour application des plus remarquables la description du plan, ceci par la combinaison de résultats dus à G. Darboux et à M. G. Kœnigs.

La *cinématique graphique* de M. d'Ocagne, qui codifie divers procédés de l'ingénieur Marbec et des professeurs Perry et Smith, ressemble, en effet, étonnamment à la statique graphique. Les vitesses de différents points d'un même transformateur s'assemblent en équipollences d'une simplicité inattendue ; on a ainsi des *cinêmes* dits du premier ordre quant aux vitesses et du second ordre quant aux accélérations. Et l'on peut se convaincre de la simplicité de ces constructions en les appliquant aux transformateurs précédemment rencontrés, notamment à l'inverseur Peaucellier.

Je serai bref en parlant de la Stéréotomie, faute de compétence suffisante. J'y aperçois toutefois de jolies épures représentant généralement des voûtes dont certaines sont de remarquables surfaces réglées sous lesquelles un géomètre aurait grand tort de passer sans lever la tête. Même le fait de ne pas s'occuper effectivement d'architecture n'excuse pas l'indifférence vis-à-vis de surfaces si parfaitement matérialisées et notamment d'arrière-voussures non moins intéressantes pour l'analyste que pour l'architecte. D'ailleurs, le cours effectivement professé par M. d'Ocagne ne comprend que deux leçons de Stéréotomie ; c'est seulement pour laisser le champ libre au choix de beaux exemples (renouvelés, d'une année à l'autre, à l'amphithéâtre) qu'il a donné à ces leçons un développement relativement considérable.

La Statique graphique est une géométrie des contours polygonaux ; deux contours principaux, le *dynamique* et le *funiculaire*, que je n'ai point à définir ici, ont des aspects ou des positions diverses de par le choix arbitraire d'un pôle ; mais, au travers de ces diversités, il est aisé de reconnaître de curieuses propriétés d'invariance interprétables d'ailleurs au moyen de considérations spatiales dépendant d'un complexe linéaire. C'est un nouveau rapprochement des plus intéressants entre la statique et la géométrie cinématique qui, comme on l'a vu dans le tome I, est vivement éclairée par l'introduction de tels complexes.

Une des principales applications de la Statique graphique consiste en l'étude de l'équilibre des systèmes réticulaires, qui sont, en somme, des systèmes polygonaux matérialisés. Et l'on conçoit aisément tout ce qu'il peut y avoir de relations directes ou réciproques entre les segments matériels qui composent de tels systèmes et les segments, plus fictifs, qui représentent les forces ou les moments des forces y appliqués. C'est ce que montre M. d'Ocagne, toujours avec les ressources générales de la géométrie des ensembles de droites.

Le calcul graphique procède de l'idée de construction géométrique ; appliqué d'abord aux équations algébriques, il donne aussi une géométrie des contours polygonaux qui, pour les équations uniques de degré quelconque, sont notamment des *orthogones* qu'on peut tracer sur un transparent à orienter sur un quadrillage fixe. L'intégration graphique rappelle, à l'inverse, les adjointes infinitésimales dont M. d'Ocagne nous a entretenus dans une Note

terminant son premier volume ; dans les deux cas on associe, par exemple, les tangentes d'une courbe C_1 aux ordonnées d'une C_0 et, s'il s'agit d'intégration, il faut évidemment passer de C_0 à C_1. Les différentes constructions des C_1, en partant des C_0 amplifient, de manière très méthodique, diverses formules de quadrature connues depuis fort longtemps mais introduites dans l'Analyse de façons assez disparates. Les C_1 correspondent à une C_0 unique par le choix arbitraire d'un *pôle* ; ces C_1 sont alors liées comme les polygones funiculaires qui dépendent d'un choix arbitraire absolument analogue ; on voit, à nouveau, les remarquables analogies qui s'établissent entre des sujets qui jusqu'ici ont été plutôt traités en des ouvrages séparés, mais qu'un géomètre habile devait réunir dès qu'il lui était permis de s'affranchir des soucis immédiats de telle ou telle spécialisation. Ajoutons qu'après les quadratures proprement dites, on peut étendre la notion d'intégration graphique aux équations différentielles et que certaines méthodes peuvent être considérées comme la traduction du procédé d'approximations successives dû à M. Emile Picard. Nouvel aperçu synthétique qui n'est pas à dédaigner pour arriver, par une voie géométrique, à la théorie analytique de ces approximations.

Le calcul grapho-mécanique, comme son nom l'indique, mécanise le calcul graphique. Son but principal est l'intégration et plus particulièrement l'évaluation d'aires ou de moments attachés à de certains contours fermés ; ses instruments principaux sont les planimètres. En général, les mécanismes de ces appareils sont étonnamment simples et peuvent aboutir au planimètre-hachette qui n'a pas de mécanisme du tout ; c'est un compas invariable portant un petit fer de hachette qui, appuyé sur le papier, décrit un arc pendant que l'autre pointe décrit le contour d'une aire à évaluer. Viennent ensuite les analyseurs harmoniques qui calculent les coefficients d'une série de Fourier.

Les *intégraphes* tracent les courbes C_1 de la section précédente et peuvent aussi intégrer les équations différentielles même lorsqu'elles ne rentrent pas, comme l'équation générale de Riccati, dans les types élémentairement intégrables. On peut en dire autant pour l'équation du mouvement des projectiles dans l'air et même pour les très modernes équations intégrales dont M. d'Ocagne traite un cas emprunté au type de Volterra. Notons encore les intégraphes polaires avantageux pour les intégrales renfermant des fonctions trigonométriques et notamment pour l'intégrale elliptique de première espèce mise sous la forme normale de Legendre.

Passons maintenant à la Nomographie, qui, représentée dans le passé par quelques abaques isolés, doit son développement systématique à M. d'Ocagne lui-même. Il semble qu'ici l'auteur se soit plutôt astreint à comprimer sa pensée pour ne pas donner à ses propres travaux une plus grande place qu'aux précédentes disciplines géométriques ; c'est sans s'éloigner des généralités géométriques qu'il nous présente la science des nomogrammes. Un nomogramme est un tableau graphique où on lit des résultats provenant de données variables ; il est au calcul graphique ce que la table numérique est à l'opération arithmétique isolée. Tout calcul suppose au moins deux nombres et un résultat ; le nomogramme le plus simple suppose trois systèmes de lignes dont on recherche les entrecroisements ponctuels, généralement interpolables à vue. Il importe évidemment beaucoup que ces lignes ne soient pas absolument quelconques ; on peut même espérer se tirer d'affaire, dans beaucoup de cas, rien qu'avec des droites ou des cercles ; de là l'importante notion de la transformation ou *anamorphose* des nomogrammes. Mais le

nomogramme à entrecroisement peut avoir divers inconvénients résultant de sa trop grande densité en certaines régions ; une transformation dualistique le transformera alors en nomogramme à alignement sur lequel on sera ramené à la recherche de points alignés, et cette transformation présentera, en outre, le très grand intérêt de permettre de constituer des monogrammes à plus de trois entrées, ce qui est un fait capital pour les applications. Il y a là quelques idées immédiatement séduisantes par leur généralité et leur simplicité ; je craindrais de les gâter en essayant de plus longues descriptions ; elles intéressent d'ailleurs le géomètre pur autant que le praticien.

M. d'Ocagne les applique à la résolution des triangles sphériques en s'astreignant d'ailleurs à traiter des cas couramment imposés par l'astronomie ; c'est vraiment la table graphique à la disposition de la science qui utilise le plus de tables ; celles qui en utilisent moins pourront *a fortiori* songer aux nomogrammes qui leur seraient le plus avantageux. L'Ouvrage se termine par un nouvel appendice qui ajoute quatre notes du plus haut intérêt aux cinq déjà publiées à la fin du tome premier.

La *Description mécanique des courbes algébriques quelconques*, découverte par le géomètre anglais Kempe, a été étendue aux surfaces algébriques par M. G. Kœnigs ; on envisage ainsi, évidemment, la généralité maximum des systèmes articulés.

La *Statique graphique des systèmes de l'espace* repose sur l'existence du complexe linéaire formé de droites de moment nul. C'est une certaine représentation plane de tels complexes, imaginée par M. Mayor, de Lausanne, qui permet maintenant de traiter sur épures des problèmes statiques spatiaux absolument quelconques.

L'intégration grapho-mécanique de l'équation de Riccati au moyen du planimètre-hachette donne une importance nouvelle à cet appareil d'une simplicité si singulière. On peut trouver, *par quadratures*, le contour à faire décrire à la pointe de l'appareil pour que la hachette décrive la courbe intégrale désirée. Si l'on réfléchit au rôle immense de l'équation de Riccati en géométrie, lequel se confond d'ailleurs avec celui de l'équation linéaire du second ordre, il faut convenir qu'il y a là un résultat de première importance.

Quant aux *Applications de la nomographie à l'intégration graphique*, elles s'ajoutent naturellement au précédent sujet et atteignent jusqu'à l'intégration de diverses équations différentielles du second ordre.

L'impression donnée par le premier volume de l'Ouvrage se maintient intégralement dans le second. Il s'agit bien d'un Cours de Géométrie où l'on voit toujours la technique des hauteurs de la science pure. J'ai cru relever que ce passage se faisait aussi conformément aux grandes traditions de l'Ecole Polytechnique ; j'ai vu que des aperçus inattendus, esthétiques et profonds, étaient souvent dus à des ingénieurs, qui faisaient ainsi de la science appliquée par des moyens que le savant à l'esprit le plus abstrait ne pourrait désavouer. Bel exemple pour la jeune génération qui, hélas ! n'aura que trop à travailler dans le domaine matériel, mais à qui un tel ouvrage peut montrer que la chose est possible sans perdre de vue les lumineux sommets de la science pure.

A. Buhl (Toulouse).

A.-S. Ramsey. — **Elementary geometrical optics.** — 1 vol. in-8°, xi-173 p., cart., 6 sh., G. Bell et Sons, London, 1914.

La partie de la physique qu'on appelle « optique géométrique » n'a rien perdu de son intérêt, même de nos jours, quoique la notion de rayon lumi-

neux ne soit pas tout à fait claire dans les théories actuellement admises. Les lois expérimentales de l'optique et leurs conséquences géométriques restent toujours vraies, quel que soit la manière de les interpréter. Il est d'ailleurs utile, pour les raisons didactiques, entre autres, de traiter à part l'étude des rayons.

C'est à ce point de vue qu'a été écrit le livre de M. A.-S. Ramsey. Sous une forme très condensée (173 pages, dont 40 environ sont consacrée aux exemples et problèmes) l'auteur nous expose les phénomènes de réflexion, de réfraction, de dispersion, étudie les miroirs, les lentilles (minces et épaisses, ainsi que leurs systèmes), les télescopes, les microscopes et l'œil humain, ce dernier dans la mesure de ce qu'il faut pour comprendre le fonctionnement des instruments optiques. Parfois même on peut reprocher à l'auteur de trop condenser son exposé. C'est ainsi que nous aimerions voir la théorie des aberrations traitées plus en détail. Il est à regretter de même que l'auteur ne s'est pas consacré assez de place à la théorie du microscope, dont l'exposé n'occupe qu'une page et demie.

Les démonstrations de tous les théorèmes sont rigoureuses et ne demandent que la connaissance des éléments des mathématiques supérieures. Il est encore à noter, à l'avantage du livre, que l'auteur ne se contente pas d'énoncer les lois expérimentales qui servent de base pour l'établissement des théorèmes de l'optique géométrique, mais qu'il donne encore les descriptions des expériences, toujours bien choisies, permettant de vérifier ces lois. Par contre, en décrivant certains phénomènes optiques, l'auteur évite quelquefois de mentionner leur côté physique, qui est pourtant de toute première importance. Pour ne citer qu'un exemple, l'auteur, en définissant l'indice de réfraction, nous dit que celui-ci dépend « on the nature of the media and the kind of light ». Ne serait-il pas plus simple de dire explicitement que l'indice de réfraction dépend de la couleur, d'autant plus que quelques pages plus loin l'auteur établit cette dépendance.

En résumé, le livre de M. Ramsey contient, malgré son petit volume, beaucoup de problèmes bien choisis et bien exposés et illustrés par de nombreuses figures, et il mérite d'être recommandé aux étudiants qui commencent la physique et qui voudraient approfondir leurs connaissances en optique géométrique. A. Tcherniavsky (Genève).

L. Zoretti. — **Tables numériques usuelles.** — 1 vol. in-8° de 52 p. ; 3 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1917.

Ce petit volume contient deux tables principales dont l'usage est facilité par un système d'onglets.

La Table I contient, dans les colonnes intitulées 1, 2, 3, ..., 9, les produits par ces nombres de ceux qui sont inscrits dans la colonne 1. La colonne intitulée $\frac{1}{n}$ contient les inverses des mêmes nombres, ou plutôt les quatre premiers chiffres significatifs de ces inverses. Le symbole 10^{-5} ou 10^{-6} placé en tête signifie qu'il faut, pour avoir la valeur de $\frac{1}{n}$, placer la virgule au cinquième ou au sixième rang à partir de la droite. La valeur inscrite pour $\frac{1}{n}$ est exacte à une demi-unité près de l'ordre du dernier chiffre décimal inscrit.

La colonne n^2 contient le carré de n, ou ce carré divisé par 10 ou par 100, ce qui est indiqué par le multiplicateur 10 ou 100 placé en tête. On n'a inscrit que les quatre premiers chiffres significatifs de ce carré. Le nombre inscrit est donc simplement approché avec une erreur en plus ou moins égale à une demi-unité de l'ordre du dernier chiffre inscrit.

La colonne log n contient les quatre premières décimales du logarithme de n (ou du produit de n par une puissance de 10). L'erreur est toujours d'une demi-unité du dernier ordre.

La Table II donne les valeurs des quatre lignes trigonométrique des arcs de 15′ en 15′, avec trois ou quatre chiffres significatifs, ainsi que les valeurs de ces arcs en grades à un demi-centigrade près, et leurs valeurs en radians avec quatre ou trois chiffres décimaux exacts. Toutes les valeurs inscrites sont approchées à moins d'une demi-unité du dernier ordre.

Quand le dernier chiffre inscrit est un 5, on a indiqué par un chiffre spécial (5*) le 5 *fort*, c'est-à-dire obtenu en forçant un 4 dans le cas où le premier chiffre négligé est égal ou supérieur à 5.

L'interpolation appliquée aux trois dernières colonnes de la Table I permet de calculer, à une unité du dernier ordre près, le nombre qui correspond à un nombre non inscrit.

La *multiplication* se fait au moyen des neuf premières colonnes.

La *division* se fait en multipliant par l'inverse du diviseur ; on trouve cet inverse dans la colonne $\frac{1}{n}$.

L'*élévation au carré* et l'*extraction des racines carrées* se font au moyen de la colonne n^2.

Les *racines* ou *puissances quelconques*, les *exponentielles* se calculent au moyen de la colonne log n.

Ces quelques citations suffisent à montrer que ces tables peuvent en résumer beaucoup d'autres qui seraient peut-être plus complètes ; mais ici l'auteur n'a justement voulu conserver et présenter sous forme maniable que ce qui répondait au besoin immédiat de la pratique courante.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Giornale di Matematiche di Battaglini. — 3me série-vol. 45. — Janvier-août 1917. — V. Segre : Sul moto di una corrente liquida in un canale a cielo in parte scoperto. — R. Occhipinti : Alcune semplici quistioni sulle superficie evolute. — Fr. Tricomi : Sull' iterazione delle funzioni di linee. — Pio Scatizzi : Nuovo integrafo per equazioni di Abel e di Riccati. — A. Crespi ; Forme di spezzamento delle quartiche gobbe di 1a e 2a specie. — M. Pannelli : Sulla Jacobiana di una rete di superficie algebriche. —