V

Lorsque sont concourantes les normales abaissées de A_1, A_2, A_3 sur les côtés a'_1, a'_2, a'_3 et sur les côtés a'_1, a'_3, a'_2, il en est de même des normales abaissées de A'_1, A'_2, A'_3 sur les côtés a_1, a_2, a_3 et a_1, a_3, a_2, en d'autres mots :

Lorsque les deux triangles sphériques A_i *et* A'_i *sont di-orthologiques en* A_1, *ils le sont encore en* A'_1.

V

26. — Nous pouvons encore dans l'expression fondamentale

$$[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\lambda_1\mathfrak{b} + \mu_1\mathfrak{c} \ldots] \pm [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\lambda'_1\mathfrak{b}' + \mu'_1\mathfrak{c}' \ldots]$$

remplacer les vecteurs arbitraires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, ... par les vecteurs également arbitraires $V\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, $V\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, ... et ensuite, pour satisfaire à la condition imposée aux λ_i, μ_i ..., prendre

$$\lambda_1 = \mathfrak{a}' . \mathfrak{b} \qquad \lambda_2 = \mathfrak{b}' \ \mathfrak{c} \qquad \lambda_3 = \mathfrak{c}' . \mathfrak{a}$$
$$\mu_1 = \mathfrak{a}' . \mathfrak{c} \qquad \mu_2 = \mathfrak{b}' . \mathfrak{a} \qquad \mu_3 = \mathfrak{c}' . \mathfrak{b} \ .$$

Dans ce cas nous avons évidemment

$$\lambda_1 V\mathfrak{c}\mathfrak{a} + \mu_1 V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = V\mathfrak{a} . \mathfrak{a}', \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']^2[V\mathfrak{a} . \mathfrak{a}', \mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad V\mathfrak{b} . \mathfrak{b}', \mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad V\mathfrak{c} , \mathfrak{c}', \mathfrak{a}\mathfrak{b}]\\ &- [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2[V\mathfrak{a}' , \mathfrak{a} , \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad V\mathfrak{b}' , \mathfrak{b} , \mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad V\mathfrak{c}' . \mathfrak{c} . \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \equiv 0 \ . \qquad \text{(XI)}\end{aligned}$$

27. — Nous allons faire de cette identité *deux applications*. — 1. D'abord elle nous servira à démontrer *un théorème de M. R. Bricard*[1] :

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques.

Lorsque les points d'intersection Q_i *des droites* $(A_i, A'_i) \equiv p_i$ *avec les côtés* a_i *du premier triangle sont collinéaires, les droites de jonction* q_i *des points* $(a_i, a'_i) \equiv P_i$ *avec les sommets* A'_i *du second triangle sont concourantes et inversement.*

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 96.

En effet, si les vecteurs des sommets et côtés des deux triangles sont:

$$A_i \equiv V\mathfrak{bc} \;;\; V\mathfrak{ca} \;;\; V\mathfrak{ab} \qquad A'_i \equiv \mathfrak{a}' \;;\; \mathfrak{b}' \;;\; \mathfrak{c}'$$
$$a_i \equiv \mathfrak{a} \;;\; \mathfrak{b} \;;\; \mathfrak{c} \qquad a'_i \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \;;\; V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \;;\; V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

nous trouvons pour les vecteurs de la droite p_1, du point Q_1, du point P_1 et de la droite q_1

$$p_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad P_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$
$$Q_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad q_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'.$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de notre identité s'annule; le second terme disparaissant alors également, les droites q_i sont concourantes et inversement. q. e. d.

2. On peut tirer de notre identité encore la généralisation pour la sphère d'un *théorème* dû à M. *Constantinescu*[1]

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques. *Lorsque les normales* q_i *abaissées des* A_i *sur les côtés* a'_i *du second triangle coupent les côtés* a_i *du premier triangle en trois points collinéaires* Q_i, *les normales* q'_i *abaissées des* A'_i *sur les* a_i *coupent les côtés* a'_i *du second triangle également en trois points collinéaires* Q'_i.

En effet, lorsque les côtés et les sommets des deux triangles sphériques sont

$$A_i \equiv V\mathfrak{bc} \;;\; V\mathfrak{ca} \;;\; V\mathfrak{ab} \qquad A'_i \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \;;\; V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \;;\; V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$
$$a_i \equiv \mathfrak{a} \;;\; \mathfrak{b} \;;\; \mathfrak{c} \qquad a'_i \equiv \mathfrak{a}' \;;\; \mathfrak{b}' \;;\; \mathfrak{c}'$$

nous aurons successivement pour les normales q_1 et q'_1 et pour leurs intersections Q_1 et Q_2 avec les côtés a_1 et a'_1

$$q_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad q'_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$
$$Q_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad Q'_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'.$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de l'identité s'annule, ce qui entraîne la disparition du se-

[1] *Mathesis,* 1913, p. 69.

cond. Il s'ensuit que dans ce cas les Q'_i aussi sont collinéaires. q. e. d.

VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par. 24 pour satisfaire à la condition imposée aux λ_i, μ_i ...

$$\lambda_1 = [\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{r}] \qquad \lambda_2 = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}'\mathfrak{r}] \qquad \lambda_3 = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}'\mathfrak{r}]$$
$$\mu_1 = [\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{r}] \qquad \mu_2 = [\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{r}] \qquad \mu_3 = [\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{r}]$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1\mathfrak{b} + \mu_1\mathfrak{c} = \mathrm{V}\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,\mathrm{V}\mathfrak{r}\mathfrak{a}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs arbitraires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, ... par $\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathrm{V}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, ... , cette dernière expression devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à déterminer

$$\mathrm{V}\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quelconques :

$$\begin{aligned} &[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\mathrm{V}\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{c}\,,\,\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \\ &- [\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\mathrm{V}\mathfrak{a}'\,,\,\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad \mathrm{V}\mathfrak{b}'\,,\,\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad \mathrm{V}\mathfrak{c}'\,,\,\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}] \equiv 0 \end{aligned} \qquad \text{(XII)}$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la sphère *un théorème de Möbius* [1] *:*

Soient $\mathrm{A_i}$ *et* $\mathrm{A'_i}$ *deux triangles sphériques et* l *une droite sphérique quelconque.*

Lorsque les droites $\mathrm{p_i}$ *qui relient les points* $\mathrm{P_i} \equiv (\mathrm{l}, \mathrm{a_i})$ *aux sommets* $\mathrm{A'_i}$ *du second triangle sont concourantes, il en est de même des droites* $\mathrm{p'_i}$ *qui relient les points* $\mathrm{P'_i} \equiv (\mathrm{l}, \mathrm{a'_i})$ *aux sommets* $\mathrm{A_i}$ *du premier triangle.*

Car, si le vecteur de la *droite* sphérique l est $\mathfrak{r}$ et si les vecteurs des sommets A_i et A'_i sont $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ nous aurons successivement pour les points P_i, P'_i et les droites p_i, p'_i :

$$\mathrm{P}_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad \mathrm{P}'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$
$$p_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}'\,,\,\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad p'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}\,,\,\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\,.$$

[1] *Crelle's Journal*, Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.