

IV

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

crit dans la même conique en soumettant les $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ seuls à une permutation circulaire; dans ce cas nous trouvons :

$$[\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1][\mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}_1][\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}'_3] = [\mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}_1][\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3].$$

La division des deux dernières équations conduit pour six points d'une conique sphérique à la relation

$$\frac{[\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3][\mathbf{r}_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}_3][\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_3]}{[\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1][\mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}_1][\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}'_3]} = \frac{[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}'_3]}{[\mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}_1]}$$

qui n'est autre chose que *le théorème bien connu de Carnot*.

Nous interrompons ici les applications de l'identité pour y revenir au paragraphe 30.

IV

24. — Les identités entre *six* vecteurs des paragraphes précédents ne sont pas les seules possibles. Il y en a d'autres; ainsi on démontre sans peine que

$$\begin{aligned} & [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'] [\lambda_1 \mathbf{b} + \mu_1 \mathbf{c} \quad \lambda_2 \mathbf{c} + \mu_2 \mathbf{a} \quad \lambda_3 \mathbf{a} + \mu_3 \mathbf{b}] \\ & \pm [\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}] [\lambda'_1 \mathbf{b}' + \mu'_1 \mathbf{c}' \quad \lambda'_2 \mathbf{c}' + \mu'_2 \mathbf{a}' \quad \lambda'_3 \mathbf{a}' + \mu'_3 \mathbf{b}'] \end{aligned}$$

est identiquement nul, pourvu que l'expression scalaire

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_3$$

ne change pas en valeur absolue, lorsque les $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sont remplacés par les $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ et inversement.

25. — On satisfait déjà à la condition imposée aux λ_i et μ_i en prenant

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}' & \lambda_2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' & \lambda_3 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}' \\ \mu_1 &= -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}' & \mu_2 &= -\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}' & \mu_3 &= -\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}' \end{aligned}$$

et c'est ainsi qu'on arrive à l'identité

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'] [\mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{b}\mathbf{c} \quad \mathbf{V}\mathbf{b}', \mathbf{c}\mathbf{a} \quad \mathbf{V}\mathbf{c}', \mathbf{a}\mathbf{b}] + [\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}] [\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad \mathbf{V}\mathbf{b}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad \mathbf{V}\mathbf{c}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \equiv 0 \quad (\text{X})$$

Applications. — 1. Supposons que les sommets et les côtés de deux triangles sphériques aient les vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &\equiv \mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c} & \mathbf{A}'_i &\equiv \mathbf{V}\mathbf{b}'\mathbf{c}'; \mathbf{V}\mathbf{c}'\mathbf{a}'; \mathbf{V}\mathbf{a}'\mathbf{b}' \\ \mathbf{a}_i &\equiv \mathbf{V}\mathbf{b}\mathbf{c}; \mathbf{V}\mathbf{c}\mathbf{a}; \mathbf{V}\mathbf{a}\mathbf{b} & \mathbf{a}'_i &\equiv \mathbf{a}'; \mathbf{b}'; \mathbf{c}' \end{aligned}$$

Dans ce cas, les droites qui relient les sommets correspondants (A_i, A'_i) et les points d'intersection des côtés correspondants (a_i, a'_i) seront

$$(A_1, A'_1) \equiv V\alpha, \beta'c' \quad (a_1, a'_1) \equiv V\alpha', \beta c$$

etc., et l'identité (IX) nous apprend :

Lorsque les droites (A_i, A'_i) sont concourantes, les points d'intersection (a_i, a'_i) sont collinéaires et inversement. C'est là le théorème bien connu de Desargues.

2. Lorsque par contre les sommets et les côtés de deux triangles sphériques A_i et A'_i sont

$$\begin{aligned} A_i &\equiv \alpha; \beta; c & A'_i &\equiv \alpha'; \beta'; c' \\ a_i &\equiv V\beta c; Vc\alpha; V\alpha\beta & a'_i &\equiv V\beta'c'; Vc'\alpha'; V\alpha'\beta' \end{aligned}$$

la même identité nous fournit un *théorème de Steiner*¹ :

*Lorsque les normales abaissées des A_i sur les a'_i sont concourantes, il en est de même des normales abaissées des A'_i sur les a_i .*²

On le voit sans peine en remarquant que $V\alpha, \beta'c'$, etc., sont dans ce cas les normales abaissées des sommets A_i du premier triangle sur les côtés a'_i du second. Leur produit pseudo-scalaire est nul lorsque ces trois normales sont concourantes.

3. En troisième lieu considérons ensemble les identités :

$$\begin{aligned} [abc][V\alpha, \beta'c' \quad V\beta, c'\alpha' \quad Vc, \alpha'b'] + [\alpha'\beta'c'][V\alpha', \beta c \quad V\beta', c\alpha \quad Vc', \alpha b] &\equiv 0 \\ [abc][V\alpha, c'\beta' \quad V\beta, \beta'\alpha' \quad Vc, \alpha'c'] + [\alpha'c'\beta'][V\alpha', c\beta \quad V\beta', \beta\alpha \quad Vc', \alpha c] &\equiv 0. \end{aligned}$$

La seconde s'obtient de la première, lorsqu'on y change β' et c' en c' et β' . Or, la disparition des premiers termes dans les deux identités entraîne celle des seconds termes, ce qui, en supposant que les α, β, c sont les sommets d'un premier et α', β', c' ceux d'un second triangle sphérique signifie :

¹ *Gesammelte Werke*, Bd. I, S. 155-162.

² Voir par. 23, 2.

Lorsque sont concourantes les normales abaissées de A_1, A_2, A_3 sur les côtés a'_1, a'_2, a'_3 et sur les côtés a'_1, a'_3, a'_2 , il en est de même des normales abaissées de A'_1, A'_2, A'_3 sur les côtés a_1, a_2, a_3 et a_1, a_3, a_2 , en d'autres mots :

Lorsque les deux triangles sphériques A_i et A'_i sont diorthologiques en A_1 , ils le sont encore en A'_1 .

V

26. — Nous pouvons encore dans l'expression fondamentale

$$[a'b'c'][\lambda_1 b + \mu_1 c \dots] \pm [abc][\lambda'_1 b' + \mu'_1 c' \dots]$$

remplacer les vecteurs arbitraires $a, a', b, \dots$ par les vecteurs également arbitraires $Vbc, Vb'c', Vca, \dots$ et ensuite, pour satisfaire à la condition imposée aux $\lambda_i, \mu_i \dots$, prendre

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a' \cdot b & \lambda_2 &= b' \cdot c & \lambda_3 &= c' \cdot a \\ \mu_1 &= a' \cdot c & \mu_2 &= b' \cdot a & \mu_3 &= c' \cdot b \end{aligned}$$

Dans ce cas nous avons évidemment

$$\lambda_1 Vca + \mu_1 Vab = Va \cdot a' \cdot bc$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned} &[a'b'c']^2[Va \cdot a' \cdot bc \quad Vb \cdot b' \cdot ca \quad Vc \cdot c' \cdot ab] \\ &- [abc]^2[Va' \cdot a \cdot b'c' \quad Vb' \cdot b \cdot c'a' \quad Vc' \cdot c \cdot a'b'] \equiv 0. \end{aligned} \quad (XI)$$

27. — Nous allons faire de cette identité *deux applications*. — 1. D'abord elle nous servira à démontrer *un théorème de M. R. Bricard*¹:

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques.

Lorsque les points d'intersection Q_i des droites $(A_i, A'_i) \equiv P_i$ avec les côtés a_i du premier triangle sont collinéaires, les droites de jonction q_i des points $(a_i, a'_i) \equiv P_i$ avec les sommets A'_i du second triangle sont concourantes et inversement.

¹ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 96.