II

15. — Les identités étudiées dans le chapitre précédent sont toutes des conséquences de l'identité (I). Nous arrivons maintenant à une relation identique entre six vecteurs qui ne peut pas être ramenée à la même source. Supposons en effet que nous ayons quatre vecteurs quelconques $\mathfrak{r}_0 . \mathfrak{r}_1 . \mathfrak{r}_2 , \mathfrak{r}_3 .$ Le vecteur composé

$$[\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3]\mathfrak{r}_0 - [\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_0]\mathfrak{r}_1 + [\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1]\mathfrak{r}_2 - [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2]\mathfrak{r}_3$$

est nul, vu que ses projections sur les trois vecteurs non-coplanaires

$$\mathrm{V}\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 \ , \qquad \mathrm{V}\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1 \ , \qquad \mathrm{V}\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2$$

sont nulles. Dès lors sa projection sur tout autre vecteur $\mathrm{V}\mathfrak{r}_4 \mathfrak{r}_5$ disparaît également, et nous aurons l'identité :

$$\begin{aligned} &[\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_4 \mathfrak{r}_5] - [\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_0][\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_4 \mathfrak{r}_5] \\ &\qquad + [\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_4 \mathfrak{r}_5] - [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2][\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4 \mathfrak{r}_5] \equiv 0 \qquad \text{(VII)} \end{aligned}$$

qui constitue une relation entre les « sinus » de huit parmi les « angles trièdres » qu'on obtient en reliant six points de la surface sphérique au centre. Lorsqu'on remplace chacun des produits pseudoscalaires par le déterminant correspondant, on retrouve l'identité bien connue entre huit déterminants de *Cayley*.

16. — Dans le cas spécial où deux des six points en question, $\mathfrak{r}_0$ et $\mathfrak{r}_5$ par exemple, coïncident, l'identité devient

$$[\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_4][\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3] + [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_4][\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1] + [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4][\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2] \equiv 0 \ . \qquad \text{(VIII)}$$

Elle établit une relation entre les sinus de six parmi les angles trièdres formés, lorsque les sommets d'un pentagone sphérique sont reliés au centre de la sphère. Or, un produit pseudoscalaire comme $[\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3]$ étant égal à $\sin a_1 \mathfrak{l}_1 . \mathfrak{r}_1$ ou $\sin a_1 \sin h_1$ devient dans le cas-limite du plan proportionnel à l'aire du triangle plan correspondant. L'identité (VIII) nous fournit alors la relation bien connue entre les triangles d'un pentagone plan de *Möbius*[1].

---

[1] A. F. Möbius. *Gesammelte Werke*, Bd. I, S. 202.

17. — Nous allons voir maintenant que notre dernière identité admet une interprétation toute différente. En effet, soient $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ les sommets, $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$ les côtés du triangle de référence sphérique et

$$B_1\mathfrak{x}_1 + B_2\mathfrak{x}_2 + B_3\mathfrak{x}_3 \equiv \mathfrak{B} \qquad \sin A_1\, b_1\mathfrak{l}_1 + \sin A_2\, b_2\mathfrak{l}_2 + \sin A_3\, b_3\mathfrak{l}_3 \equiv \mathfrak{b}$$
$$\sin A_1\, u_1\mathfrak{l}_1 + \sin A_2\, u_2\mathfrak{l}_2 + \sin A_3\, u_3\mathfrak{l}_3 \equiv \mathfrak{l} \qquad x_1\mathfrak{x}_1 + x_2\mathfrak{x}_2 + x_3\mathfrak{x}_3 \equiv \mathfrak{x}$$

si nous posons comme toujours le produit pseudoscalaire $[\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3] \equiv \Delta$, la multiplication interne des vecteurs superposés nous permet d'écrire :

$$(\mathfrak{B}\,\mathfrak{l})^n = \Delta^n(B_1u_1 + B_2u_2 + B_3u_3)^n \qquad (\mathfrak{b}.\mathfrak{x})^n = \Delta^n(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^n$$

de sorte que l'équation d'une courbe sphérique de classe ou d'ordre n, avec la convention $b_ib_jb_k \ldots \equiv b_{i,j,k\ldots}$, etc., peut s'écrire

$$(\mathfrak{B}.\mathfrak{l})^n = 0 \qquad (\mathfrak{b}.\mathfrak{x})^n = 0 \,.$$

La droite sphérique qui relie les points $\mathfrak{x}'$ et $\mathfrak{x}''$ coupera la conique sphérique $(\mathfrak{b}.\mathfrak{x})^2 = 0$ en un point $\mathfrak{x}' + \lambda\mathfrak{x}''$ pourvu que λ satisfasse à

$$(\mathfrak{b}.\mathfrak{x}' + \lambda\mathfrak{x}'')^2 \equiv (\mathfrak{b}.\mathfrak{x}')^2 + 2\lambda(\mathfrak{b}.\mathfrak{x}')(\mathfrak{b}.\mathfrak{x}'') + \lambda^2(\mathfrak{b}.\mathfrak{x}'')^2 = 0 \,.$$

Les points $\mathfrak{x}'$ et $\mathfrak{x}''$ sont conjugués par rapport à la conique lorsque

$$(\mathfrak{b}.\mathfrak{x}')(\mathfrak{b}.\mathfrak{x}'') = 0 \,.$$

18. — Revenons maintenant à l'identité (VIII), que nous écrivons

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4][\mathfrak{b}\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3] + [\mathfrak{b}\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_4][\mathfrak{b}\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1] + [\mathfrak{b}\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_4][\mathfrak{b}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2] \equiv 0 \,.$$

Dans cette forme elle nous donne le théorème connu : Si dans un quadrilatère complet de sommets $V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4$, $V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$, etc., deux couples de sommets opposés sont conjugués par rapport à une conique sphérique ou plane $(\mathfrak{b}.\mathfrak{x})^2 = 0$, il en est de même pour le troisième. Il est évident qu'on obtient le théorème réciproque, lorsqu'on remplace les $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, $\mathfrak{l}_4$, $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{x}_4$ et $\mathfrak{B}$.

19. — On peut arriver à ce résultat, qui d'ailleurs a déjà été obtenu au paragraphe 5, d'une autre manière encore. En

effet, si $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ sont les points diagonaux d'un quadrilatère complet, les sommets seront

$$\lambda_2\mathfrak{x}_2 \pm \lambda_3\mathfrak{x}_3 \,, \qquad \lambda_3\mathfrak{x}_3 \pm \lambda_1\mathfrak{x}_1 \,, \qquad \lambda_1\mathfrak{x}_1 \pm \lambda_2\mathfrak{x}_2$$

et, si $\mathfrak{b}$ est toujours le vecteur symbolique du paragraphe 17, l'identité

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}.(\lambda_2\mathfrak{x}_2 + \lambda_3\mathfrak{x}_3)\ \mathfrak{b}.(\lambda_2\mathfrak{x}_2 - \lambda_3\mathfrak{x}_3) + \mathfrak{b}.(\lambda_3\mathfrak{x}_3 + \lambda_1\mathfrak{x}_1)\ \mathfrak{b}.(\lambda_3\mathfrak{x}_3 - \lambda_1\mathfrak{x}_1)\\ + \mathfrak{b}.(\lambda_1\mathfrak{x}_1 + \lambda_2\mathfrak{x}_2)\ \mathfrak{b}.(\lambda_1\mathfrak{x}_1 - \lambda_2\mathfrak{x}_2) \equiv 0\end{aligned}$$

nous apprend que les sommets $\lambda_1\mathfrak{x}_1 \pm \lambda_2\mathfrak{x}_2$ sont conjugués par rapport à certaine conique, lorsque les points $\lambda_2\mathfrak{x}_2 \pm \lambda_3\mathfrak{x}_3$ et les points $\lambda_3\mathfrak{x}_3 \pm \lambda_1\mathfrak{x}_1$ le sont.

20. — Remarquons encore en passant que les équations

$$(V\mathfrak{b}\mathfrak{l})^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad (V\mathfrak{B}\mathfrak{x})^2 = 0$$

aussi ont une signification géométrique bien simple, lorsque $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{B}$ sont les vecteurs symboliques du paragraphe 17. En effet nous trouvons

$$\begin{aligned}(V\mathfrak{b}\mathfrak{l})^2 &\equiv [V(S_1 b_1 \mathfrak{l}_1 + S_2 b_2 \mathfrak{l}_2 + \ldots)(S_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + S_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \ldots)]^2\\ &\equiv S_1^2 S_2^2 S_3^2[(b_2 u_3 - b_3 u_2)\mathfrak{x}_1 + (b_3 u_1 - b_1 u_3)\mathfrak{x}_2 + (b_1 u_2 - b_2 u_1)\mathfrak{x}_3]^2\end{aligned}$$

ou encore, si nous remplaçons $\mathfrak{x}_i . \mathfrak{x}_k$, c'est-à-dire ω_{ik} par $\omega_i\omega_k$, pour la première équation

$$\begin{aligned}\omega_{11}(b_2 u_3 - b_3 u_2)^2 + \ldots + 2\omega_{12}(b_2 u_3 - b_3 u_2)(b_3 u_1 - b_1 u_3) + \ldots\\ \equiv [\omega_1(b_2 u_3 - b_3 u_2) + \omega_2(b_3\omega_1 - b_1\omega_3) + \omega_3(b_1\omega_2 - b_2\omega_1)]^2 = 0\ .\end{aligned}$$

Cette équation est celle du lieu géométrique des cordes de longueur $\frac{\pi}{2}$ dans la conique sphérique $(\mathfrak{b}.\mathfrak{x})^2 = 0$. De même on trouve

$$(V\mathfrak{B}\mathfrak{x})^2 \equiv [\Omega_1(B_2 x_3 - B_3 x_2) + \Omega_2(B_3 x_1 - B_1 x_3) + \Omega_3(B_1 x_2 - B_2 x_1)]^2 = 0$$

comme équation du lieu géométrique des points où les tangentes menées à la courbe sphérique $(\mathfrak{B}.\mathfrak{l})^2 = 0$ sont normales [1].

21. — L'identité (VIII) entre cinq vecteurs conduit à un autre *théorème connu sur les quadrangles complets,* lors-

---

[1] *Géométrie sphérique en coordonnées projectives,* p. 217.

qu'on y remplace $\mathfrak{x}_0$ par $V\mathfrak{b}\mathfrak{l}$. En tenant compte de ce que

$$[\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4] = V\mathfrak{b}\mathfrak{l} . V\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4 = \mathfrak{b} . V\mathfrak{l} . \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4$$

nous trouvons en effet qu'elle prend la forme

$$[\mathfrak{b} . V\mathfrak{l}, \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4][\mathfrak{b} . V\mathfrak{l}, \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3] + [\mathfrak{b} . V\mathfrak{l}, \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4][\mathfrak{b} . V\mathfrak{l}, \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1]$$
$$+ [\mathfrak{b} . V\mathfrak{l}, \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4][\mathfrak{b} . V\mathfrak{l}, \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2] \equiv 0 .$$

Or, si $\mathfrak{l}$ est une droite sphérique quelconque, le point d'intersection de cette droite avec le côté $(\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_k)$ du quadrangle complet des $\mathfrak{x}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, point que nous voulons appeler P_{ik}, sera $V\mathfrak{l}, \mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_k$. L'identité nous apprend la propriété connue de l'involution des six points

$$P_{14} , \quad P_{23} ; \qquad P_{24} , \quad P_{31} ; \qquad P_{34} , \quad P_{12}$$

pourvu que $\mathfrak{b}$ soit toujours le vecteur symbolique du paragraphe 17 correspondant a certaine conique.

III

22. — Nous arrivons maintenant à une identité nouvelle, qui admet plusieurs interprétations et qui, peut-être plus que les précédentes, montre tout le profit qu'on peut tirer de ces relations vectorielles, non seulement pour démontrer facilement et pour relier entre eux des théorèmes assez différents connus, mais encore pour en trouver des nouveaux.

C'est l'identité

$$[V\mathfrak{a}\mathfrak{a}' V\mathfrak{b}\mathfrak{b}' V\mathfrak{c}\mathfrak{c}'] + [V\mathfrak{b}\mathfrak{c}' V\mathfrak{c}\mathfrak{a}' V\mathfrak{a}\mathfrak{b}'] + [V\mathfrak{c}\mathfrak{b}' V\mathfrak{a}\mathfrak{c}' V\mathfrak{b}\mathfrak{a}'] \equiv 0 . \qquad \text{(IX)}$$

La démonstration en est simple, quand on remarque que le second et le troisième terme se déduisent du premier par permutation circulaire positive des vecteurs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et par permutation circulaire négative des vecteurs $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$. Nous obtenons ainsi en développant les trois produits pseudo-scalaires

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'][\mathfrak{b}'\mathfrak{b}\mathfrak{c}] - [\mathfrak{a}'\mathfrak{a}\mathfrak{c}][\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']$$
$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'][\mathfrak{a}'\mathfrak{c}\mathfrak{a}] - [\mathfrak{c}'\mathfrak{b}\mathfrak{a}][\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}']$$
$$[\mathfrak{c}\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'][\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{b}] - [\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{b}][\mathfrak{a}\mathfrak{c}'\mathfrak{a}']$$

dont la somme est identiquement nulle.