Enoncé des nouveaux théorèmes sur le viriel.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

deux forces AP et BQ égales, parallèles et de sens contraire, liées à deux points A et B.

Désignons par P la valeur commune de ces deux forces, par ω l'angle que forme l'une quelconque de ces deux forces avec le prolongement de la distance AB de leurs points d'application, et par l la projection de cette distance AB sur la direction de ces forces. Appelons *longueur de liaison* de ce couple, la longueur représentant la distance AB estimée suivant la direction de ces forces.

Relativement à un pôle quelconque, le viriel de ce couple lié est constant. Il a pour valeur

$$V = P.AB \cos\omega = \pm Pl \,. \qquad (2)$$

Il est + ou — selon que l'angle ω est aigu ou obtus.

Si $\omega = 0$ ou 2π, le couple lié sera formé par deux forces directement opposées. Dans ce cas particulier, il sera dit *rectiligne*. Son viriel est égal à P.AB en considérant P comme + ou — selon que les deux forces se repoussent ou s'attirent.

Enoncé des nouveaux théorèmes sur le viriel.

Théorème I. — *Relativement à un même pôle* O, *le viriel de la projection d'une force liée* AP *sur un plan quelconque passant par le rayon polaire* OA, *est égal au viriel de cette même force* AP.

Soit AP′ la projection de cette force sur le plan considéré passant par OA, et soit R la projection commune des extrémités P et P′ sur le rayon OA, les viriels de ces deux forces AP et AP′ par rapport à O, ont la même valeur $V = \pm OA.OR$.

Théorème II. — *Le viriel d'une force liée* AP *relativement à un pôle* O *est égal au viriel de cette même force relativement à la projection de ce pôle sur un plan quelconque passant par cette force.*

Ce dernier théorème résulte de ce que le viriel est symétrique par rapport au pôle O et à l'extrémité P.

Théorème III. — *Pour qu'un système quelconque de forces liées dans l'espace ait une résultante nulle, il faut et il suffit que le viriel total de ces forces relativement à un pôle O soit constant quelle que soit la position du pôle.*

En effet, soient x, y, z les coordonnées du pôle considéré C par rapport à trois axes rectangulaires $Oxyz$ fixes dans l'espace, a_k, b_k, c_k celles du point d'application d'une quelconque de ces forces et X_k, Y_k, Z_k la projection de cette force sur ces trois axes.

Si V_c et V_0 représentent respectivement les viriels totaux de ce système de forces par rapport aux pôles C et O, on a :

$$V_c = V_0 - (\Sigma X_k x + \Sigma Y_k y + \Sigma Z_k z) ,$$

quel que soit le pôle C, cette relation donne $V_c = V_0$. Mais comme V_0 est constant, il faut que V_c le soit aussi. S'il en est ainsi, la relation ci-dessus donne, quel que soit C, la condition suivante :

$$\Sigma X_k = \Sigma Y_k = \Sigma Z_k = 0 .$$

Corollaire I. — *Si les points d'application d'un système quelconque de forces liées de résultante nulle, sont les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point M de l'espace sur ces forces, le viriel total de ces forces est nul, quel que soit le pôle considéré, et réciproquement pour un système de forces liées dont les points d'application sont définis comme ci-dessus.*

Remarque. — Dans le cas particulier où les points d'application de ces forces se confondent avec le point M, on obtient le théorème suivant bien connu et son réciproque. *La somme algébrique des viriels d'un nombre quelconque de forces concourantes de résultante nulle, est nulle.*

Théorème IV. — *Si un système de points libres, dont chacun est sollicité par un nombre quelconque de forces en équilibre, est tel que l'ensemble de toutes les forces tant extérieures qu'intérieures (suivant la direction des lignes de jonction de ces points) appliquées aux divers points de ce système, forment un système de couples liés, la somme algébrique des* *viriels de ces divers couples est nulle quelle que soit le pôle considéré.*

Ce théorème se démontre au moyen du précédent.

THÉORÈME V. — *Lorsqu'on imprime des déplacements virtuels quelconques aux points d'application d'un nombre quelconque de forces liées et à ceux des forces d'un système quelconque de couples liés dans l'espace, le travail virtuel total effectué par ces forces et ces couples pour ces déplacements virtuels, est égal à la valiation correspondante ou à la différentielle du viriel total de ces forces et couples liés relativement à un pôle quelconque fixe.*

En effet, désignons respectivement par $\mathfrak{T}$ et V, le travail virtuel total et le viriel total de ces forces et couples; par δ_x, δ_y, δ_z les projections du déplacement virtuel donné au point d'application d'une des forces sur trois axes rectangulaires $Oxyz$, par P la valeur algébrique commune des forces d'un de ces couples et par δl, la variation de la projection *(longueur de liaison)* de la distance des deux points d'application des forces de ce couple sur la direction commune. Les deux relations (1) et (2) donnent par différentiation l'équation suivante :

$$\delta V = \Sigma X \delta x + \Sigma Y \delta y + \Sigma Z \delta z + \Sigma P \delta l = \mathfrak{T} ,$$

dans laquelle l sera + ou — selon que l'angle ω du couple correspondant à P est aigu ou obtus.

Applications.

1. — *Aux figures réciproques planes ou gauches de* CREMONA. On sait, d'après une propriété statique de ces figures[1], que, si a et b sont les longueurs des deux côtés homologues de deux figures polygonales réciproques CREMONA (A) et (B), et si, aux extrémités d'un côté a de la première (A), on applique deux forces égales et directement opposées *(couple lié rectiligne)* ayant pour valeur commune la longueur b et pour sens celui du polygone fermé dans la figure (B) corres-

[1] *Cours de Géométrie de l'Ecole polytechnique*, par M. d'OCAGNE, t. II, p. 159.