Application des considérations précédentes au problème de Torricelli.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

λ doit satisfaire à l'équation du paragraphe précédent :

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = \square .$$

L'impossibilité de l'équation considérée, ou encore celle du système des équations simultanées :

$$X^2 + 2X + 2 = \square , \qquad X^2 - 2X - 2 = \square ,$$

est équivalente à celle de l'équation $\sin u + \sin v = 1$.

Application des considérations précédentes au problème de Torricelli.

18. — Au paragraphe 8, la solution du problème de FERMAT a été rattachée par une voie toute naturelle à l'étude des solutions rationnelles de l'équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT :

$$(1 + t^2)(1 + 2t - t^2) = \square .$$

Cette équation est du type qui vient d'être considéré à l'instant : le polynôme du quatrième degré du premier membre est décomposé en un produit de facteurs quadratiques à coefficients rationnels.

La traduction analytique de l'énoncé du problème de FERMAT pouvait fort bien se présenter à TORRICELLI sous une forme équivalente, à la seule condition d'utiliser les formules de DIOPHANTE et non les formules de BRAHMAGUPTA, dans la représentation de l'arithmotriangle pythagorique.

Ces formules de DIOPHANTE,

$$b = \frac{P^2 - Q^2}{P^2 + Q^2} a , \qquad c = \frac{2PQ}{P^2 + Q^2} a ,$$

ramènent la recherche des arithmotriangles pythagoriques, jouissant des deux propriétés énoncées $a = \square$ et $b + c = \square$, à l'étude des solutions entières de l'équation indéterminée :

$$(P^2 + Q^2)(P^2 + 2PQ - Q^2) = \square .$$

Tout facteur premier de l'un des deux polynômes quadratiques doit être un facteur premier de l'autre, et dans les

deux cas sous des puissances impaires; or tout diviseur commun des deux polynômes quadratiques appartient aussi à leur somme et à leur différence :

$$2P(P+Q)\ , \qquad 2Q(P-Q)\ ;$$

P et Q étant premiers entre eux, par définition, ce facteur commun ne peut être que le nombre deux.

Comme d'autre part, en raison de la présence de P^2+Q^2, aucun doute n'est possible sur les signes, l'équation se décompose soit en le système :

$$P^2+Q^2=\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=\square\ ,$$

soit en le système :

$$P^2+Q^2=2\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=2\square\ ;$$

le second système se ramène d'ailleurs au premier par la substitution $P+Q=2P_1$, $P-Q=2Q_1$; en d'autres termes, à toute solution t_1 correspond une nouvelle solution $t=\frac{1-t_1}{1+t_1}$, ce qui résulte de la symétrie qui existe dans les rôles des deux cathètes.

L'équation

$$(P^2+Q^2)(P^2+2PQ-Q^2)=\square\ ,$$

du problème de FERMAT *se décompose ainsi en deux équations simultanées*

$$P^2+Q^2=\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=\square\ ,$$

dont le système lui est équivalent.

Nous avons alors :

$$a+c=\frac{(P+Q)^2}{P^2+Q^2}a=\square\ ,$$

nous retrouvons ainsi que la somme de l'hypoténuse et de *l'une* des deux cathètes est un nombre carré parfait.

La solution générale de l'équation $P^2+2PQ-Q^2=\square$ étant donnée par la formule

$$\frac{Q}{P}=2.\frac{1-x}{1+x^2}\ ,$$

nous sommes, par cette méthode et en utilisant l'équation $P^2 + Q^2 = \square$, ramenés à l'équation,

$$(x^2 + 1)^2 + 4(x - 1)^2 = \square \ ;$$

du paragraphe 14.

19. — Pour terminer, il convient de remarquer que les considérations générales du paragraphe 15 s'appliquent précisément aux équations

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \qquad \text{et} \qquad \mu^3 - 2\mu = \square$$

des paragraphes 8 et 14. J'ai déjà signalé que la seconde n'est qu'une conséquence de la première par la transformation

$$\lambda = \mu - \frac{2}{\mu} \ ,$$

qui implique d'ailleurs que λ soit un carré parfait.

L'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \qquad \text{ou} \qquad \lambda(\lambda^2 + 8) = \square$$

est bien de l'espèce considérée au paragraphe 15. En posant $\lambda = \frac{P}{Q}$, elle devient

$$PQ(P^2 + 8Q^2) = \square \ ;$$

Q ne peut avoir de facteur premier à une puissance impaire : c'est nécessairement au signe près un carré parfait. Quant à P, il est de même de l'une des formes $\pm p^2$ ou $\pm 2p^2$. Le produit PQ devant être positif, la question de signe ne se pose pas et il suffit de prendre :

$$P = 2p^2 \quad \text{ou} \quad p^2 \qquad \text{et} \qquad Q = q^2 \ .$$

La première hypothèse, $P = 2p^2$, $Q = q^2$ donne :

$$2(p^4 + 2q^4) = \square \ ;$$

le nombre entier p doit donc être pair ; soit $p = 2p'$; l'équation devient

$$8p'^4 + q^4 = \square \ ;$$

et la solution correspondante est $\lambda' = 8\frac{p'^2}{q^2}$. Quant à la se-

conde hypothèse, elle donne la même équation :

$$p^4 + 8q^4 = \square ,$$

mais avec $\lambda = \frac{p^2}{q^2}$. Entre les deux solutions λ et λ', qui correspondent ainsi à une même solution de l'équation

$$\omega^4 + 8 = \square ,$$

existe la relation $\lambda\lambda' = 8$, laissant invariante l'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square .$$

En résumé : les solutions de cette dernière équation sont des nombres rationnels carrés ou doubles de carrés, et elles se transforment en l'équation :

$$\omega^4 + 8 = \square .$$

Nous retombons ainsi sur l'analyse de LAGRANGE (pages 386 et 387 du mémoire cité); les plus simples solutions sont (d'après LAGRANGE) :

$$\omega = 1 , \quad \frac{7}{6} , \quad \frac{239}{13} , \ \ldots$$

20. — L'équation

$$\mu^3 - 2\mu = \square$$

se laisse traiter d'une manière analogue ; μ est au signe près un carré ou le double d'un carré et, suivant les cas, cette équation se transforme en l'une ou l'autre des équations :

$$2x^4 - y^4 = \square , \quad x^4 - 2y^4 = \square .$$

LAGRANGE (pages 378-379 de son remarquable Mémoire) a bien remarqué qu'alors que les équations $x^4 + y^4 = \square$, $x^4 \pm 4y^4 = \square$, $2(x^4 \pm y^4) = \square$, $x^4 + 2y^4 = \square$ sont impossibles, d'après DIOPHANTE, FERMAT ou EULER, il n'en est pas de même de l'une et de l'autre des deux équations

$$2x^4 - y^4 = \square , \quad x^4 - 2y^4 = \square ;$$

la première admet les solutions :

$$\begin{aligned} x &= 1 & y &= 1 \\ x &= 13 & y &= 1 \\ x &= 1525 & y &= 1343 \\ x &= 2\cdot165\cdot017 & y &= 2\cdot372\cdot159 \ \ldots \ ; \end{aligned}$$

la seconde admet les solutions [1] :

$$\begin{aligned} x &= 3 & y &= 2 \\ x &= 113 & y &= 84 \\ x &= 57\cdot123 & y &= 6\cdot214 \ \ldots \end{aligned}$$

Plus loin (p. 386 et 387), LAGRANGE a mis en évidence l'équivalence de chacune de ces deux équations avec l'équation $s^4 + 8t^4 = \square$ du paragraphe précédent. J'ai noté au paragraphe 6 qu'une pièce des *Opera postuma* de L. EULER concernait également l'équivalence des équatione $s^4 + 8t^4 = \square$ et $2x^4 - y^4 = \square$.

Si d'ailleurs on applique à la cubique d'équation

$$x^3 - 2x = y^2$$

la méthode de dérivation des arithmopoints au moyen de la tangente, on trouve que les coordonnées (x_2, y_2) du nouveau point d'intersection de la cubique avec la tangente au point (x_1, y_1) sont fournies par les formules :

$$x_2 = x_1 + 2y\cdot\rho \ , \qquad y_2 = y_1 + (3x^2 - 2)\rho \ ,$$

avec

$$\rho = \frac{16x^2 - 3y^4}{8x^2y^3} = \frac{4 + 12x^2 - 3x^4}{8y^3} \ ;$$

la loi de succession des abscisses est notamment la suivante :

$$x_2 = \left(\frac{x_1^2 + 2}{2y}\right)^2 \ ;$$

[1] Une erreur s'est glissée dans l'édition des *Œuvres* de LAGRANGE (p. 378), où le nombre y de la troisième solution particulière de l'équation $x^4 - 2y^4 = \square$ est égal à 2·614 ; alors que la véritable valeur de ce nombre est celle ci-dessus indiquée (6·214).

la cubique admet une série d'arithmopoints d'abscisses

$$x_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \qquad x_2 = \left(\frac{113}{84}\right)^2, \ \ldots$$

qui sont toutes des nombres rationnels carrés parfaits.

L'application au problème de FERMAT des principes généraux relatifs aux équations de BRAHMAGUPTA-FERMAT, soit cubiques à zéro rationnel, soit du quatrième degré à premier membre décomposable en un produit de facteurs rationnels du second degré, permet, en résumé, d'expliquer l'origine du problème de TORRICELLI; elle ramène méthodiquement, en outre, la discussion de l'équation de ce problème de FERMAT et d'Ev. TORRICELLI à l'analyse de LAGRANGE et d'EULER.

Paris, le 5 février 1918.

REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\int uv\,dx$

PAR

M. Michel PETROVITCH (Belgrade).

Il est manifeste qu'il n'existe aucune fonction u de la variable x telle que l'intégrale définie

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty uv\,dx \qquad (1)$$

ait une valeur finie, déterminée et différente de zéro *quel que soit le polynôme* v *en* x.

Un fait curieux est, cependant, à signaler: *il existe des fonctions* u *de* x *pour lesquelles l'intégrale* (1) *a une valeur finie, déterminée et différente de zéro quel que soit le polynôme* v *en* x *à coefficients nombres algébriques* (entiers, com-