

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LES ANTINOMIES CANTORIENNES. — I.

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-17322>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LES ANTINOMIES CANTORIENNES. — I.

PAR

D. MIRIMANOFF (Genève).

Introduction. Dans un travail récent, publié ici même¹, j'ai essayé de faire un rapprochement nouveau entre les antinomies cantoriennes les plus connues, celle de Russell et celle de Burali-Forti. Cette étude m'a amené à m'occuper d'un problème important, que j'ai appelé problème fondamental de la théorie des ensembles, et qui consiste à trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble d'éléments existe. Ce n'est qu'en m'appuyant sur plusieurs postulats que j'ai réussi à obtenir un critère pour une catégorie d'ensembles que j'ai appelés ensembles ordinaires.

Comme je l'ai fait remarquer à la fin de mon travail, ces postulats auraient besoin d'être examinés de près et discutés. Je compte le faire prochainement, mais cette discussion exige à son tour une étude préparatoire. Pour se rendre compte de la portée des postulats, il est utile de préciser et d'approfondir les notions en partie nouvelles que j'ai été amené à introduire dans mon travail. C'est ce que je vais essayer de faire dans ces premières remarques.

1. — Convenons de représenter un ensemble E dont les éléments sont a, b, c, \dots par (a, b, c, \dots) . Il y a deux choses à distinguer dans un ensemble : les éléments a, b, c, \dots et

¹ *Ens. math.*, année 1917, p. 37 à 52.

l'opération de réunion ou d'association figurée par la parenthèse.

Dans ses *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre*, J. König distingue plusieurs sortes d'opérations d'association qu'on pourrait évidemment figurer par des parenthèses de formes différentes. J'ai fait abstraction de ces distinctions dans mon travail sur les antinomies.

Nous dirons donc qu'un ensemble E ne diffère pas d'un ensemble F , lorsque tout élément de E est un élément de F et réciproquement.

Soit a un élément d'un ensemble E . Deux cas peuvent se présenter : ou bien, par définition, l'élément a n'est pas un ensemble ; je dirai alors qu'il est indécomposable et je le désignerai par une minuscule ; ou bien l'élément a est à son tour un ensemble ; dans ce cas je le désignerai par une majuscule. Par exemple l'ensemble $E = (e, E')$ contient un élément indécomposable e et un élément-ensemble E' .

Si l'élément-ensemble E' contient deux éléments indécomposables f, g , et un élément-ensemble E'' , on pourra écrire $E' = (f, g, E'')$, d'où $E = (e, (f, g, E''))$; de même E'' pourrait être représenté par une nouvelle parenthèse, et ainsi de suite. Pour mettre en évidence la composition des éléments d'un ensemble, on est conduit, comme on le voit, à introduire des parenthèses intérieures s'emboîtant les unes dans les autres.

En supprimant les parenthèses intérieures relatives à un ensemble E on obtient un ensemble nouveau qui ne doit pas être confondu avec l'ensemble E . Supposons par exemple que l'ensemble E contienne deux éléments F et G , tels que $F = (f_1, f_2)$; $G = (g_1, g_2, g_3)$, les f_i, g_i étant des indécomposables. On pourra écrire $E = (F, G) = ((f_1, f_2), (g_1, g_2, g_3))$.

En supprimant les parenthèses intérieures, on obtient l'ensemble $(f_1, f_2, g_1, g_2, g_3)$, que j'appellerai \mathcal{E} . Or aucun des éléments de \mathcal{E} n'est un élément de E , et réciproquement ; du reste les ensembles E et \mathcal{E} diffèrent entre eux non seulement par leurs éléments, mais par le nombre de ces éléments, puisque E n'en contient que deux tandis que \mathcal{E} en contient cinq.

Comme l'ensemble \mathcal{E} est la somme des ensembles F et G , supprimer les parenthèses revient ici à remplacer l'ensemble primitif E dont les éléments sont F et G par la somme des ensembles F et G .

2. — Deux notions m'ont été particulièrement utiles dans mon travail sur les antinomies : celle de descente et celle d'ensembles isomorphes.

En partant d'un ensemble E , parcourons une suite quelconque E, E', E'', \dots où E' est un élément de E , E'' un élément de E' , etc. Cette opération, que j'ai appelée *descente*, prend fin lorsqu'on tombe sur un terme indécomposable. Telles sont par exemple les descentes E, e ; E, E', f dans l'exemple donné au commencement du n° précédent. J'appelle *noyaux* d'un ensemble E les termes indécomposables auxquels aboutissent les descentes finies de E . Un noyau de E n'est pas nécessairement un élément de E . Par exemple dans le cas de l'ensemble $E = (F, G)$, que j'ai défini à la fin du n° précédent, aucun des noyaux f, g ne figure parmi les éléments de E . Je désigne par N l'ensemble (e, f, \dots) de tous les noyaux distincts. Le nombre de ces noyaux peut être égal à 1. Tel est par exemple l'ensemble $(e, (e))$ dont l'un des éléments est l'ensemble singulier (e) .

Lorsque toutes les descentes d'un ensemble E sont finies, je dis que E est un ensemble ordinaire.

Je passe maintenant à la notion d'isomorphisme. Cette notion peut être définie par récurrence. Je dirai que deux ensembles E et F sont isomorphes, s'il est possible d'établir entre les éléments de E et ceux de F une correspondance parfaite, telle qu'à un élément indécomposable de E corresponde un élément indécomposable de F , et à un élément ensemble E' de E , un élément ensemble isomorphe F' de F , et réciproquement. Deux ensembles isomorphes différents ne diffèrent que par les noyaux et non par les opérations d'association ou de réunion figurées par les parenthèses.

Ce qui est commun par conséquent aux ensembles isomorphes c'est leur structure ou le mode de leur composition. Si l'on fait abstraction des propriétés particulières qui distinguent un ensemble de ses isomorphes, si l'on ne retient que

les particularités de sa structure, on arrive à un concept nouveau qu'on pourrait appeler type de structure de cet ensemble, concept étroitement lié aux notions de puissance, et de nombres ordinaux de Cantor; il se confond en effet avec la notion de puissance, ou de nombre cardinal, lorsqu'on fait abstraction de la structure des éléments de l'ensemble, ce qui revient à regarder ces éléments comme des indécomposables; et d'autre part les types d'ordre des ensembles bien ordonnés, ou les nombres ordinaux de Cantor, dérivent directement des types de structure de certains ensembles particuliers que j'ai appelés ensembles S.

3. — *Ensembles de 1^{re} et 2^{de} sorte.* Conformément à Russell, je dis qu'un ensemble E est de 1^{re} sorte, s'il diffère de chacun de ses éléments; il est au contraire de 2^e sorte, s'il contient un élément au moins qui ne diffère pas de E. En modifiant légèrement cette définition, nous dirons qu'un ensemble est de 1^{re} sorte au sens nouveau, s'il n'est isomorphe à aucun de ses éléments, et nous dirons qu'il est de 2^e sorte au sens nouveau, s'il est isomorphe à l'un au moins de ses éléments (cf. le n^o 2 de mon travail cité). Il résulte de cette définition qu'un ensemble ordinaire est toujours de 1^{re} sorte.

Je rappelle l'exemple d'un ensemble de 2^e sorte au sens nouveau que j'ai donné dans mon travail (p. 41). Supposons qu'un ensemble E contienne deux éléments: un élément indécomposable e et un élément-ensemble E' de la forme (e', E'') , où $E'' = (e'', E''')$, et en général $E^{(n)} = (e^{(n)}, E^{(n+1)})$ pour tout n . On voit immédiatement que l'ensemble E est isomorphe à E' ; il est donc bien de 2^e sorte au sens nouveau.

Si en particulier aucun des noyaux $e', e'', \dots e^{(n)}, \dots$ n'était différent de e , l'ensemble E pourrait être regardé comme un ensemble de 2^e sorte au sens de Russell.

Autre exemple d'un ensemble de 2^e sorte au sens nouveau. Je me rappelle avoir vu il y a quelques années un livre pour enfants dont la couverture était ornée d'une grande image en couleurs. Cette image que j'appellerai J représentait deux enfants admirant le livre même dont je parle ou plutôt son image, c'est-à-dire l'image J' de l'image J. Sur cette image

J' on apercevait, on devinait plutôt, les deux enfants en petit et l'image du livre déformés par la perspective. Tout cela devait théoriquement continuer à l'infini. Or, l'image primitive J peut être considérée comme un ensemble dont les éléments sont les enfants e_1, e_2 , l'entourage f et l'image J' de J , se décomposant à son tour en e'_1, e'_2, f' et J'' . etc. Si donc l'on convient de regarder les éléments e_1, e_2, f et leurs transformés comme des indécomposables, l'isomorphisme de J et de J' est manifeste, et l'image J possède bien, au point de vue où je me place, les propriétés caractéristiques d'un ensemble de 2^o sorte au sens nouveau.

Ensembles bien ordonnés et ensembles S.

4. — J'ai fait voir dans le n^o 5 de mon travail sur les antinomies qu'en partant d'un nombre ordinal quelconque α de Cantor on pouvait former un ensemble ordinaire α_s à un noyau dont la structure dérive directement des relations d'ordre définissant le nombre α et que j'ai appelé ensemble S . Une correspondance parfaite peut être établie de cette manière entre les nombres ordinaux de Cantor et les ensembles S ainsi formés. Soient α et β deux nombres ordinaux de Cantor; si α est inférieur à β , l'ensemble α_s est un élément de l'ensemble β_s .

Je crois utile de compléter maintenant les indications que j'ai données au n^o 5.

Rappelons d'abord que les nombres ordinaux de Cantor sont les types d'ordre d'ensembles bien ordonnés.

Soit $E = (a, b, c, \dots)$, un ensemble bien ordonné dont le premier élément est a , le second b , le troisième c , etc.

En remplaçant a, b, c, \dots par des éléments nouveaux quelconques a', b', c', \dots on obtient un ensemble E' qui diffère de E , mais dont le type d'ordre est le même, pourvu que les relations d'ordre n'aient pas changé, c'est-à-dire par exemple que a', b', c', \dots soient respectivement le premier, le second, le troisième élément de E' , etc. Je rappelle que l'ensemble E' est dit semblable à E . Pour arriver à la notion du type d'ordre, ou nombre ordinal α , correspondant à E , nous devons faire abstraction des propriétés particulières des éléments a, b, c, \dots et ne tenir compte que des relations

d'ordre telles que « a précède b », « b précède c », etc. Peu importe par conséquent que les éléments a, b, c, \dots soient des points, des corps, des symboles... Supposons en particulier que ces éléments soient des ensembles A, B, C, \dots . Cherchons à définir ces ensembles de telle manière que leur structure dérive directement des relations d'ordre des éléments correspondants a, b, c, \dots . Il suffit pour cela de remplacer les mots « précède » ou « est précédé de » par les mots « est un élément de » et « contient ».

Quelle sera alors par exemple la structure de A ? L'élément correspondant a n'étant « précédé » d'aucun autre élément, A ne doit « contenir » aucun élément; c'est donc un *indécomposable* ou un noyau, que je désignerai par e . De même l'élément b n'étant précédé que de l'élément a , B est un ensemble qui ne contient qu'un seul élément: le noyau e . Donc $B = (e)$. On verra de même que C doit être de la forme $(e, (e))$, etc.

On pourra définir ainsi de proche en proche les éléments suivants D, F, \dots de l'ensemble nouveau, qui n'est autre que l'ensemble S correspondant à E .

Par cette transformation les propriétés particulières des éléments de l'ensemble initial E ont été éliminées; seules les relations d'ordre apparaissent dans la structure de l'ensemble transformé.

A tous les ensembles bien ordonnés du type α correspond un ensemble S (ou plus exactement un type de structure α_s) déterminé, car je suppose qu'on fait abstraction des propriétés particulières du noyau e . Et réciproquement, à tout ensemble S (son type de structure) correspond un nombre ordinal α déterminé.

5. — Comme je l'ai fait remarquer dans le n° 6 de mon travail, on peut édifier la théorie des ensembles S en s'appuyant uniquement sur les propriétés suivantes, qu'il faut alors regarder comme une définition de ces ensembles.

1. Un ensemble S est un ensemble ordinaire à un noyau (le noyau e).

2. Si x et y sont deux éléments d'un ensemble S , l'un des deux est un élément de l'autre.

3. Si E est un ensemble S , et si x est un élément de E , tout élément de x est un élément de E .

Indiquons les propriétés les plus importantes des ensembles S qui découlent de cette définition :

a) Si x et y sont deux éléments d'un ensemble S , on ne saurait avoir à la fois « x est un élément de y » et « y est un élément de x ».

En effet, tout ensemble E dont les éléments x, y sont liés par des relations de cette forme, possède la descente E, x, y, x, \dots , dans laquelle les termes x, y , se succèdent périodiquement. Cette descente étant infinie, l'ensemble E ne saurait être un ensemble S .

b) Soit $E, E', \dots E^{(n)}, e$ une descente quelconque de E . Je dis que tous les termes de cette descente sont des éléments de E . En effet, en vertu de la propriété 3, cela est vrai de E'' et par suite, en vertu de la même propriété, de $E^{(3)} E^{(4)}$, etc. En particulier le noyau e est un élément de E .

Il en résulte que tout ensemble S contient un élément indécomposable, le noyau e .

c) Tout élément E' de E est un ensemble S .

Il est évident d'abord que E' est un ensemble ordinaire à un seul noyau (le noyau e).

Soient maintenant x', y' deux éléments de E' . En vertu de la propriété 3, x', y' sont des éléments de E ; donc, en vertu de 2, l'un d'eux (x' par exemple) est un élément de l'autre (de y'). Par conséquent E' possède les propriétés 1 et 2.

Soit maintenant x'' un élément de x' . En vertu de la propriété *b)*, x'' est un élément de E . Donc, en vertu de 2, x'' est un élément de E' , à moins que E' ne soit un élément de x'' , mais cette dernière hypothèse est à rejeter, car elle entraînerait une descente infinie. Donc x'' est un élément de E' et par conséquent E' possède les trois propriétés caractéristiques des ensembles S .

d) Soit \mathcal{E} un sous-ensemble de E . Il est évident que \mathcal{E} possède les propriétés 1 et 2.

Supposons de plus que l'ensemble \mathcal{E} possède aussi la propriété 3 et qu'il diffère de E . Je dis que \mathcal{E} figure alors parmi les éléments de E .

En effet soit E' un élément de E qui n'appartient pas à \mathcal{E} ; en vertu de 2 et 3, tous les éléments de \mathcal{E} sont contenus dans E' . Par conséquent \mathcal{E} est un sous-ensemble de E' . Si \mathcal{E} diffère de E' , on conclura de même que l'ensemble \mathcal{E} est un sous-ensemble d'un élément E'' de E' , etc. Comme la descente E, E', E'', \dots est finie, on tombera finalement sur un terme $E^{(n)}$ égal à \mathcal{E} . Or, en vertu de la propriété *b)* $E^{(n)}$ est un élément de E .

Donc \mathcal{E} est un élément de E , si \mathcal{E} diffère de E .

On en déduit la propriété suivante que j'ai déjà énoncée dans le paragraphe précédent :

Théorème. Etant donnés deux ensembles S de même noyau e , ou bien ils sont égaux, ou bien l'un est un élément de l'autre.

Soient E et F deux ensembles S de même noyau e , et supposons que E diffère de F . Je dis que l'un de ces ensembles est un élément de l'autre.

Désignons par \mathcal{E} l'ensemble de *tous* les éléments communs à E et F . Soit d'autre part x un élément quelconque de \mathcal{E} et x' un élément quelconque de x . En vertu de 3, x' est à la fois un élément de E et un élément de F . Par conséquent x' est un élément de \mathcal{E} . Il en résulte que l'ensemble \mathcal{E} possède la propriété 3.

Donc, en vertu de *d)*, \mathcal{E} est un élément de E , si \mathcal{E} diffère de E et pour la même raison \mathcal{E} est un élément de F , si \mathcal{E} diffère de F .

D'ailleurs \mathcal{E} ne peut pas être à la fois élément de E et de F , puisque, par définition, \mathcal{E} est l'ensemble de tous les éléments communs à E et F . Par conséquent \mathcal{E} se confond avec l'un des ensembles E, F , par exemple avec E , et alors E est un élément de F ; c. q. f. d.

L'analogie entre les ensembles S et les ensembles bien ordonnés est manifeste; ce qui était à prévoir.

En particulier, le théorème que nous venons de démontrer est l'analogue du théorème suivant de Cantor: Etant donnés deux ensembles bien ordonnés, ou bien ils sont semblables ou bien l'un est semblable à un segment de l'autre.

Du reste, il résulte immédiatement des propriétés 1, 2, 3

qu'à tout ensemble S correspond un nombre ordinal déterminé ; en effet tout ensemble S peut être bien ordonné ; il suffit pour cela de traduire les relations « x est un élément de y », où x et y sont deux éléments quelconques de l'ensemble, par les relations d'ordre « x précède y ». On obtient ainsi un type d'ordre déterminé que dans mon travail sur les antinomies j'ai appelé rang de l'ensemble S . En posant le rang du noyau e égal à zéro, on voit immédiatement que le rang d'un ensemble S est le plus petit nombre ordinal supérieur aux rangs de ses éléments.

L'analogie que je viens de souligner permet de ramener la théorie des ensembles bien ordonnés à celle des ensembles S . Je ne sais si cette méthode détournée présente des avantages réels. En tout cas la théorie classique de Cantor apparaît ainsi sous un aspect nouveau. L'essentiel pour nous c'est que les relations d'ordre, au lieu d'être des étiquettes artificielles, se trouvent en quelque sorte incorporées aux éléments de l'ensemble, puisque le rang de chacun d'eux est déterminé par la structure de l'élément. Aux nombres ordinaux de Cantor correspondent dans cette théorie les types de structure des ensembles S .

Dans l'étude suivante, je m'occuperai plus particulièrement des antinomies cantorienne.
