Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1917)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES REPRÉSENTATIONS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Autor: Kienast, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17319

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR
QUELQUES REPRÉSENTATIONS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

A. KIENAST (Küsnacht-Zurich).

D'après WEIERSTRASS la fonction analytique est définie par la série

$$P(x \mid a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \tag{1}$$

et par son prolongement analytique. La fonction est parfaitement déterminée par la suite infinie de quantités

$$F(a)\ , \qquad F^{(1)}(a)\ , \qquad F^{(2)}(a)\ , \ \ldots\ , \qquad F^{(\mu)}(a)\ , \ \ldots \tag{2}$$

si elle est choisie telle que la limite supérieure des valeurs limites des modules

$$\left| \sqrt[\mu]{\frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)} \right|$$

soit un nombre fini, par exemple $\frac{1}{\gamma}$. On désigne en général par $F(x)$ la fonction qui, dans sa totalité, est définie par les éléments (2).

Si K est un continu formé d'une seule pièce qui ne se recouvre nulle part elle-même, renfermant le point a, et tel que la branche de la fonction $F(x)$, formée par $P(x \mid a)$ et son prolongement analytique à l'intérieur de K, reste uniforme et régulière, M. MITTAG-LEFFLER désigne cette branche par

FK(x). En désignant le cercle de convergence de la série (1) par C, l'expression

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$$

donne la représentation analytique de FC(x). Cette expression est composée des éléments (2) et des nombres rationnels $\frac{1}{\mu!}$ indépendants du choix des dits éléments.

Le problème dont je vais m'occuper consiste à construire des expressions arithmétiques formées au moyen des constantes (2) valables dans une étoile de convergence K de centre a et circonscrite au cercle C. MM. Mittag-Leffler et Borel en ont publié des solutions des plus importantes, M. Mittag-Leffler demandant une représentation valable et gardant sa forme dans tout le domaine de la branche uniforme d'une fonction monogène.

Laissant de côté de telles conditions supplémentaires, les considérations suivantes contiennent la démonstration dans le cas le plus spécial[1] d'une méthode qui permet d'obtenir une infinité de formules à l'aide desquelles on peut transformer une expression limite[2] dans une autre. Le reste de la note sera consacré aux applications.

I

L'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire

$$x\frac{dy}{dx} - xp(x)y = x^{\alpha}\varphi(x) \ , \tag{3}$$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ ,$$

$$x^{\alpha}\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m x^{m+\alpha} \ ,$$

[1] La démonstration pour tous les cas aujourd'hui accessibles est développée dans un mémoire : « Ueber eine Integralformel und die Eigenschaften der darin vorkommenden Funktionen », *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 61. Jahrgang 1916, drittes und viertes Heft.

[2] G. Mittag-Leffler, *Sur la représentation*, etc., *Acta Math.*, t. 24, p. 184, la note.

où $p(x)$ et $\varphi(x)$ sont supposés des séries de Taylor à rayon de convergence non nul, se compose d'une intégrale particulière $V(x)$ de (3) et de l'intégrale générale

$$y_1(x) = e^{\int_0^x p(\xi)\,d\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} E(k)\,x^k \qquad (4)$$

de l'équation sans second membre

$$xy_1'(x) - xp(x)y_1(x) = 0 \ , \qquad (5)$$

c'est-à-dire

$$y(x) = y_1(x) + V(x) \ .$$

On peut arriver à la représentation d'une intégrale particulière de deux manières.

La différentiation de (3) donne

$$y'' - p(x)y' - p'(x)y = x^{\alpha-2}[x.\varphi'(x) + (\alpha - 1)\varphi(x)] = x^{\alpha-2}.\varphi_1(x) \ ,$$

d'où

$$x^2.\varphi(x)y'' - [xp(x)\varphi(x) + \varphi_1(x)]xy' - x[xp'(x)\varphi(x) - p(x)\varphi_1(x)]y = 0 \ . \qquad (6)$$

L'équation déterminante de cette équation différentielle

$$\varphi(0)\gamma(\gamma - 1) - \varphi_1(0)\gamma = \gamma.\varphi(0)[\gamma - 1 - (\alpha - 1)] = 0$$

possède comme racine 0 et α. Par conséquent (6) admet un système fondamental d'intégrales $z_1 z_2$ dont on connaît la forme analytique dans le voisinage de $x = 0$.

Chaque intégrale de (3) doit être intégrale de (6); mais la réciproque n'est pas vraie. Donc il est toujours possible de déterminer les constantes D telles qu'on ait

$$y_1(x) = D_1 z_1(x) + D_2 z_2(x) \ , \qquad (7)$$

$$V(x) = D_1' z_1(x) + D_2' z_2(x) \ . \qquad (8)$$

Il faut distinguer *trois cas :*

Premier cas : Supposons que α ne soit pas un entier. Le système fondamental de (6) est de la forme

$$z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \ , \qquad z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} \ .$$

De l'équation (7) résulte à cause des expressions pour y_1, z_1, z_2 valables dans le voisinage de $x = 0$

$$D_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad y_1(x) = D_1 z_1(x) .$$

Par suite l'équation (8) s'écrit

$$V(x) = \frac{D_1'}{D_1} y_1(x) + D_2 z_2(x) ,$$

mais si V est intégrale particulière de (3)

$$V - \frac{D_1'}{D_1} y_1(x)$$

en est une autre. Donc on est conduit au

THÉORÈME : L'équation différentielle (3) admet une intégrale complètement déterminée par la propriété d'être, dans le voisinage de $x = 0$, développable en la série convergente

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} , \qquad A_0 \neq 0 .$$

Inversement :

THÈORÈME : Si la fonction y est donnée par la série convergente

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} ; \qquad A_0 \neq 0 ,$$

l'expression (3)

$$P(y) = x \frac{dy}{dx} - xp(x)y$$

est égale à la série convergente

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m x^{m+\alpha} ; \qquad D_0 \neq 0 .$$

Second cas : Soit α un entier positif. Un système fondamental pour (6) est

$$z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} , \qquad z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [e_n + d_n \log x] x^n ,$$

et, certaines conditions étant remplies, la seconde intégrale z_2 ne contient pas de logarithme.

Si dans le développement de z_2 le terme logarithmique ne manquait pas, on concluerait de l'équation (7) $D_2 = 0$, et puisque l'égalité entre les deux membres restant est impossible, le développement de z_2 ne renferme pas de logarithme

$$z_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n .$$

Par suite l'équation (8)

$$V(x) = D_1' . \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} + D_2' . \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

conduit au

THÉORÈME : L'équation différentielle (3) admet une intégrale complètement déterminée par la propriété d'être, dans le voisinage de $x = 0$, développable en la série convergente

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k ; \qquad B_0 \neq 0 ,$$

et inversement.

Maintenant l'équation (7) pour la valeur $x = 0$ montre que le coefficient de z_2 ne peut pas disparaître. Introduisant

$$z_2 = \frac{1}{D_2} y_1(x) - \frac{D_1}{D_2} z_1(x)$$

dans (8) on aura

$$V(x) = \frac{D_2'}{D_2} y_1(x) + \frac{D_1' D_2 - D_1 D_2'}{D_2} z_1(x) ,$$

et l'on est amené au même théorème trouvé dans le premier cas. Cette substitution est seulement impossible si (8) ne renferme pas z_2 ; mais dans ce cas (8) prouve le théorème.

Troisième cas : Supposons α nul ou entier négatif. Le système fondamental de (6) est

$$z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n , \qquad z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [B_n + C_n \log x] x^n ,$$

et de (8) on tire le

THÉORÈME : L'équation différentielle (3) admet une inté-

grale représentée par la série convergente

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n + b_n \log x] x^n .$$

Les considérations faites se rapportent au cas le plus spécial du problème suivant : Déterminer le développement en série d'une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) x^i y^{(i)} = \sum_{k=0}^{m} x^{\alpha_k} [\varphi_{0k}(x) + \varphi_{1k}(x) \lg x + \ldots + \varphi_{\beta_k k}(x) (\lg x)^{\beta_k}] ,$$

$$p_i(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{i\lambda} x^{\lambda} ,$$

valable dans le voisinage du point singulier $x = 0$ pour lequel les intégrales de $P(y) = 0$ sont toutes régulières. On trouvera les résultats pour le cas général dans le mémoire cité plus haut.

De la même manière j'arrive dans ce mémoire à l'expression en série représentant asymptotiquement une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} x^{s(n-i)} \cdot p_i(x) y^{(i)} = e^{\frac{\beta x^{t+1}}{t+1} + \frac{\beta_1 x^t}{t} + \ldots + \beta_t x} \cdot x^{\sigma} \left[C_0 + \frac{C_1}{x} + \ldots \right] ,$$

$$p_i(x) = a_i + \frac{a_{i_1}}{x} + \frac{a_{i_2}}{x^2} + \ldots ; \qquad a_n \neq 0 ,$$

quand x grandit indéfiniment en étant positif.

II

On connaît plusieurs moyens pour former une intégrale définie représentant une solution particulière de (3). A ce but conduisent la méthode de la variation des constantes et un théorème de Cauchy, voir *Comptes Rendus,* T. 11, p. 2 (1840). Soit

$$\int_{x_0}^{x} W(x, t)\, dt$$

cette intégrale définie cherchée, il doit être possible de déterminer la constante C telle que l'équation subsiste

$$Cy_1(x) + V(x) = \int_{x_0}^{x} W(x, t)\,dt .$$

Or dans le cas présent il est plus simple de la tirer des équations

$$xy' - xp(x)y = x^{\alpha} \cdot \varphi(x) ,$$

$$xy'_1 - xp(x)y_1 = 0 ,$$

qui donnent

$$x[y_1 \cdot y' - y \cdot y'_1] = x^{\alpha} \cdot y_1 \cdot \varphi(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{y_1}\right] = \frac{x^{\alpha-1} \cdot \varphi(x)}{y_1(x)} ,$$

ou

$$\left|\frac{V(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{x^{\alpha-1} \cdot \varphi(x)}{y_1(x)}\,dx ; \tag{9}$$

car on a

$$\left|\frac{y(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \left|\frac{Cy_1(x) + V(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \left|\frac{V(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} .$$

C'est la formule principale et, comme l'équation différentielle (3) joue un rôle fondamental, je l'appelle *équation différentielle de liaison.*

Dans le mémoire plusieurs fois cité je fais la démonstration d'une formule analogue pour le cas général d'une équation différentielle de liaison de $n^{\text{ième}}$ ordre.

Connaissant la forme analytique des fonctions V, y_1, φ il s'ensuit :

THÉORÈME : Les deux membres de (9) convergent pour $\lim x_0 = 0$, si $R(\alpha) > 0$, $R(\alpha)$ désignant la partie réelle de la quantité α.

III

Les applications de (9) qui suivent résultent de l'introduction d'un paramètre. Je commence par le cas le plus simple :

$$y' - ay = x^{\alpha-1} . \varphi(x) \ , \tag{10}$$

$$\left| e^{-ax} . \mathrm{V}(x) \right|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} e^{-at} . t^{\alpha-1} . \varphi(t)\, dt \ . \tag{11}$$

Ici $\mathrm{V}(x)$ est représenté par la série

$$\mathrm{V}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}_k x^{k+\alpha} \ ,$$

si α n'est ni nul ni entier négatif, et si en outre $\mathrm{R}(\alpha) > 0$, on a

$$e^{-ax} . \mathrm{V}(x) = \int_{0}^{x} e^{-at} . t^{\alpha-1} . \varphi(t)\, dt \ . \tag{12}$$

La condition de convergence étant remplie pour $\alpha = 1$, on obtient pour

$$\mathrm{V}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n x^n \ ,$$

la formule

$$e^{-ax} . \mathrm{V}(x) - \mathrm{V}(0) = \int_{0}^{x} e^{-at} . \varphi(t)\, dt \ . \tag{13}$$

La relation entre $\mathrm{V}(x)$ et $\varphi(x)$ se calcule en employant dans (10) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n x^{n+\alpha} \ ,$$

ce qui donne :

$$x^{\alpha-1} . \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{D}_n x^{n+\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} [(n+\alpha)\mathrm{A}_n - a\mathrm{A}_{n-1}] x^{n+\alpha-1} \ ,$$

ou

$$\mathrm{D}_n = (n+\alpha)\mathrm{A}_n - a\mathrm{A}_{n-1} \ .$$

Pour introduire le paramètre mentionné je pose maintenant

$$A_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda} z^{\lambda} ,$$

ce qui entraîne que les $a_{n\lambda}$ et z doivent être choisis conformément à la condition que la série $\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$ soit convergente.

En faisant usage du tableau suivant :

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	*
1	0	$\frac{a a_{01}}{\alpha + 1}$	$\frac{a a_{02}}{\alpha + 1}$	*
2	0	0	$\frac{a^2 a_{02}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	*
3	*	*	*	*

on trouve

$$A_0 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} ,$$

. . . . . .

$$A_n = \frac{a^n}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)} \sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} ,$$

$$D_0 = \alpha . A_0 ,$$

. . . . . .

$$D_n = \frac{- a^n . a_{0,n-1} . z^{n-1}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1)} ,$$

et la formule (12) devient

$$e^{-ax} . (ax)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \left[\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right]$$

$$= \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-at} (at)^{\alpha-1} d(at)$$

$$- \int_0^x e^{-at} (at)^{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} d(at) . \qquad (14)$$

Elle est valable pour toutes les valeurs des a_{0n} et z telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n = \alpha \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda - ax \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n}(azx)^n}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)} \qquad (15)$$

soit par rapport à x une série convergente. Par suite $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda$ est nécessairement une série à rayon de convergence non nul et z une valeur pour laquelle elle converge. Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n}(zx)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)}$ est une série toujours convergente. Pourtant je distingue *deux cas :*

Premier cas. — Soit $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda$ une série à rayon de convergence non nul et z une valeur fixe pour laquelle elle converge. A chaque quantité positive ε si petite qu'on veut, il est possible de déterminer l'indice ν tel qu'on a pour $n > \nu$

$$\left| \sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda \right| < \varepsilon .$$

Il est facile d'obtenir la formule

$$(ax)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} = e^{ax} - \frac{(ax)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-t}.dt}{\left(1+\frac{t}{ax}\right)^{1-\alpha}} ,$$

$$= e^{ax} - \frac{a^\alpha . x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n+1-\alpha) \frac{(-1)^n}{(ax)^n} ,$$

par exemple en calculant (12) pour $\varphi(x) = 1$. Donc le premier membre de (14) peut s'écrire

$$\frac{(ax)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} \left[\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda \right]}{(ax)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} + \frac{(ax)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-t}.dt}{\left(1+\frac{t}{ax}\right)^{1-}}} = \mathrm{L} .$$

Cette forme conduit aisément à la valeur limite :

$$\lim_{x=\infty} \mathrm{L} = \lim_{n=\infty} \left(\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right) = 0 \ .$$

L'équation (14) est valable pour chaque valeur z, pour laquelle $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda}$ est convergente et pour chaque valeur x qui n'est pas point singulier de l'équation différentielle (10), c'est-à-dire pour chaque valeur finie x, $x = \infty$ étant le seul point singulier. Donc, le point $x = \infty$ étant atteint tel que $\mathrm{R}(ax) > 0$, on conclut de

$$\lim_{x=\infty} \int_0^x e^{-at} (at)^{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} d(at)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-at} (at)^{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} d(at)$$

$$= \left[\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right] \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{x=\infty} \int_0^x e^{-at} (at)^{\alpha-1} d(at) - \lim_{x=\infty} \mathrm{L} \ ,$$

le Théorème : L'égalité

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} = \int_0^{\infty} e^{-at} (at)^{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} d(at) \ ; \qquad \mathrm{R}(\alpha) > 0 \qquad (16)$$

subsiste pour chaque valeur z pour laquelle $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda}$ est convergente. L'intégrale définie dans le second membre converge au moins pour les mêmes valeurs de z.

Dans son mémoire « Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène », *Acta Math.*, T. 29, M. G. Mittag-Leffler a démontré trois théorèmes (A, B, C du § 1) se rapportant à des intégrales de la forme de l'intégrale définie dans (16). Il est facile d'étendre en suivant le même ordre d'idée les autres résultats des §§ 1 et 4 du mémoire de M. Mittag-Leffler à cette nouvelle intégrale. On est ainsi conduit au

THÉORÈME : L'intégrale

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t} . t^\alpha \left\{ \sum_{n=0}^\infty \frac{a_{0n} (zt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} dt$$

possède par rapport à z une étoile de convergence $B^{(1)}$. L'égalité

$$FB^{(1)}(z) = f(z)$$

a lieu partout à l'intérieur de $B^{(1)}$.

Cette étoile de convergence que M. Mittag-Leffler, dans le Tome 29 des *Acta Math.*, désigne par $B^{(1)}$ est identique au polygone de sommabilité de M. E. Borel.

Par le même procédé on obtient pour $\alpha = 1$ les formules (14) et (16) en partant de (13). Une intégration par parties conduit alors à la formule (16) dans laquelle on a fait $\alpha = 0$. C'est la formule célèbre de Laplace-Abel-Borel.

Second cas. — Soit $\sum_{\lambda=0}^\infty a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$ une série qui représente une fonction $f(z)$ asymptotiquement. C'est une série divergente pour chaque valeur finie z. Les considérations faites dans le premier cas seront en défaut, mais c'est M. Borel qui a remarqué que l'intégrale Laplace-Abel peut pourtant être convergente. M. Borel[1] introduit par définition la valeur de cette intégrale définie comme somme de la série divergente. Et M. G. H. HARDY[2] a formulé à cet égard son « principle » : « If two limiting processes performed in a definite order on a function of two variables lead to a definite value X, but when performed in reverse order lead to a meaningless expression Y, we may agree to interpret Y as meaning X. »

Il est curieux[3] que personne ne semble avoir remarqué la possibilité d'une démonstration exacte. Dans le cas présent il n'est pas nécessaire d'avoir recours à une nouvelle définition ou à un nouveau principe. Mais les séries conver-

---

[1] Voir p. ex. ses *Leçons sur les séries divergentes*, Gauthier-Villars, 1901.

[2] *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, 19, p. 297, 1904.

[3] Comparez la critique sévère de M. G. MITTAG-LEFFLER, « Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe », Congrès intern. des mathématiciens, Rome, 1908, Atti, 1, et *Bull. Americ. Math. Soc.*, sér. 2. vol. XIV (1908).

gentes et les séries asymptotiques dans le sens de Poincaré sont jusqu'à ce jour les seules qui ont un sens arithmétique défini. La supposition faite signifie, d'après la définition introduite par Poincaré : il subsiste pour chaque entier m l'équation

$$\lim_{z=\infty} z^m \left[f(z) - \sum_{\lambda=0}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right] = 0 .$$

Donc on écrit l'équation (14) de la manière suivante :

$$z^m . e^{-ax} . x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n \left[\sum_{\lambda=n}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right]}{\Gamma(\alpha + n + 1)}$$

$$= - z^m \left\{ f(z) - \sum_{\lambda=0}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right\} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-at} . t^{\alpha-1} dt$$

$$- z^m \left\{ \frac{-f(z)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-at} . t^{\alpha-1} dt + \int_0^x e^{-at} . t^\alpha \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{a_{0n} a^{n+1} \left(\frac{t}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right] dt \right\} ,$$

ce qui est une équation exacte. En passant à la limite $x = +\infty$, on trouve pour $R(a) > 0$ et pour chaque valeur finie de z, excepté $z = 0$,

$$0 = - z^m \left[f(z) - \sum_{\lambda=0}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right]$$

$$- z^m \left\{ - f(z) + \int_0^\infty e^{-at} (at)^\alpha \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{a_{0n} \left(\frac{at}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right] d(at) \right\} .$$

Or il subsiste pour chaque entier m l'équation

$$\lim_{z=\infty} z^m \left\{ f(z) - \int_0^\infty e^{-at} (at)^\alpha \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{a_{0n} \left(\frac{at}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right] d(at) \right\} = 0 , \qquad (17)$$

et c'est l'expression en formule du fait que l'intégrale

$$K = \int_0^\infty e^{-at} (at)^\alpha \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} \left(\frac{at}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right] d(at) \qquad (18)$$

représente asymptotiquement la fonction $f(z)$ de même que la série $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$ de laquelle on est parti.

Mais il est possible que cette intégrale K converge et représente une fonction analytique $K(z)$ dans le sens ordinaire. Donc on conclut

$$f(z) = K(z) + E ,$$

où E est une fonction représentée asymptotiquement par un développement identiquement nul. Et parce que dans les calculs faits on n'a pas introduit des parties étrangères à $f(z)$, l'équation

$$f(z) = K(z) \tag{19}$$

sera exacte dans un grand nombre de cas.

La fonction $f(z)$ est représentée asymptotiquement par la série $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$ lorsque $z = r \,.\, e^{i\psi}$ croît indéfiniment suivant un rayon déterminé. Pour les séries asymptotiques dont on fait usage dans la théorie des équations différentielles, une telle égalité asymptotique

$$f(z) \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$$

r tendant vers l'infini, est unique pour tous les arguments ψ compris dans un certain angle

$$\theta_1 < \psi = \arg z < \theta_2 .$$

Donc l'équation (17) aura lieu dans le même angle.

La série sous le signe d'intégration

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{0\lambda} \left(\frac{at}{z}\right)^\lambda}{\Gamma(\alpha + \lambda + 1)} = g\left(\frac{at}{z}\right) \tag{20}$$

est convergente ou représente une fonction $g\left(\frac{at}{z}\right)$ asymptotiquement.

Je suppose, faisant $\frac{at}{z} = u = \rho \,.\, e^{\varphi i}$, que la série

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{0\lambda} u^\lambda}{\Gamma(\alpha + \lambda + 1)}$$

soit convergente et que la fonction $g(u)$ qu'elle représente soit holomorphe dans l'angle

$$0 \leqq \rho \leqq N \ , \qquad \text{(N nombre positif arbitrairement grand)}$$
$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \ .$$

Ainsi $u = \infty$ est, pour $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ le seul point singulier possible.

En outre, je suppose que, $u = \infty$ étant singulier, $g(u)$ soit tel que l'intégrale (18) converge pour

$$\varphi_1 < \arg u < \varphi_2 \ ,$$

ou, t ayant l'argument 0,

$$\varphi_1 < \arg a - \arg z < \varphi_2 \ ,$$
$$\arg a - \varphi_2 < \arg z < \arg a - \varphi_1 \ .$$

Il résulte que l'intégrale (18) converge si $z = r \, . \, e^{i\psi}$ est une valeur quelconque dans l'angle

$$\arg a - \varphi_2 < \psi < \arg a - \varphi_1 \ ,$$

$\varepsilon \leqq r \leqq \infty$ quelque petit que soit le nombre positif ε. Dans cet angle l'intégrale (18) représente une fonction analytique holomorphe.

Dans le cas le plus simple et très important $g(u)$ est fonction rationnelle, holomorphe pour $u = \infty$. Sous cette condition l'intégrale (18) est convergente dans tout le plan de la variable z sauf peut-être sur quelques rayons limitant un nombre fini d'angles. Les fonctions qu'elle représente, holomorphes pour tout point z intérieur à ces différents angles sont en général des fonctions analytiques différentes.

L'exemple suivant montre le grand avantage que présentent les formules (16) et (19).

On sait par la méthode Poincaré-Horn, que l'équation différentielle

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0$$

admet un système fondamental qui, pour toutes les valeurs

finies de n réelles ou complexes, est représenté asymptotiquement par les séries

$$y_1(x) = \frac{e^{ix}}{\sqrt{ix}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda + n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda + 1)} \frac{1}{(2ix)^{\lambda}},$$

$$y_2(x) = \frac{e^{-ix}}{\sqrt{-ix}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda + n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda + 1)} \frac{1}{(-2ix)^{\lambda}},$$

lorsque $r = |x|$ augmente indéfiniment, si

pour la fonction $y_1(x)$: $-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$,

» » $y_2(x)$: $+\delta < \arg x < 3\pi - \delta$,

le nombre positif δ étant aussi petit qu'on le veut.

Je pose $a = 1$, $\alpha = n - \frac{1}{2}$ et à cause de la formule

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda + 1)} (-u)^{\lambda} = (1 + u)^{n - \frac{1}{2}};$$

(16) donne

$$y_{\varepsilon}(x) = \frac{e^{-(-1)^{\varepsilon} . ix} . e^{(-1)^{\varepsilon}\frac{\pi}{4} i}}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-t} . t^{n-\frac{1}{2}} \frac{\left[1 + (-1)^{\varepsilon} \frac{t}{2ix}\right]^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} dt,$$

$$(\varepsilon = 1, 2)$$

d'où

$$y_1(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n . \sqrt{2} . e^{\frac{\pi i}{2}(n-1)}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_{-i}^{\infty} e^{-xu} (1 + u^2)^{n-\frac{1}{2}} du,$$

$$y_2(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n . \sqrt{2} . e^{-\frac{\pi i}{2}(n-1)}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_{+i}^{\infty} e^{-xu} (1 + u^2)^{n-\frac{1}{2}} du.$$

Ici le chemin d'intégration doit atteindre l'infini tel que $R(xu) > 0$.

Enfin les relations

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-i\frac{n\pi}{2}} \cdot y_1(x) = \mathrm{H}_n^{(1)}(x) ,$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{i\frac{n\pi}{2}} \cdot y_2(x) = \mathrm{H}_n^{(2)}(x) ,$$

montrent qu'on est arrivé à la représentation par intégrales définies des fonctions cylindriques de troisième espèce[1] (Hankel).

On voit que la formule (16) et d'autres qu'on obtient par le même procédé fournissent un moyen indispensable pour des calculs effectifs, notamment pour les séries dérivant des équations différentielles linéaires du type hypergéométrique.

IV

Je reprends les considérations du commencement de III, en disposant des constantes $a_{n\lambda}$ comme il suit

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	0	0	0	0 .
1	$\frac{a_{00}}{\alpha + 1}$	0	0	0 .
2	$\frac{a \cdot a_{00}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	$\frac{a \cdot a_{01}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	0	0 .
3	$\frac{a^2 \cdot a_{00}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	$\frac{a^2 \cdot a_{01}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	$\frac{a^2 \cdot a_{02}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	0 .

Il en résulte

$$\mathrm{A}_0 = 0 ,$$

. . . . . .

$$\mathrm{A}_n = \frac{a^{n-1} \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{0\mu} z^{\mu}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n)} ,$$

$$\mathrm{D}_0 = 0 ,$$

. . . . . .

$$\mathrm{D}_n = \frac{a^{n-1} \cdot a_{0,n-1} \cdot z^{n-1}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n)} ,$$

[1] N. Nielsen. *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen.*

et la formule (12) devient

$$e^{-ax}(ax)^{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(ax)^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\left[\sum_{n=0}^{\lambda-1}a_{0n}z^{n}\right]$$

$$=\int_{0}^{x}e^{-at}(at)^{\alpha}\left\{\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azt)^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\right\}d(at)\ . \qquad (21)$$

Cette équation est démontrée pour $R(\alpha) > 0$, mais on voit aisément qu'elle reste valable pour $\alpha = 0$. En outre on a par rapport aux $a_{n\lambda}$ et z à remplir la condition que

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n = x\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azx)^{\lambda}}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\lambda)}\ ,$$

soit une série convergente. Elle est satisfaite si $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda}z^{\lambda}$ est une série convergente; elle peut l'être encore pour une infinité de séries asymptotiques. Il est permis de donner dans (21) à x une valeur finie quelconque, si $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda}z^{\lambda}$ est convergente, mais si c'est une série asymptotique il y a des restrictions spéciales pour chaque choix des constantes $a_{0\lambda}$.

De la définition de la notion limite on conclut que pour $\lim x = +\infty$ les deux membres de (21) convergent pour les mêmes valeurs de z.

L'intégrale du second membre a été considérée dans III.

Cette formule (21) dans le cas $a = 1$, $\alpha = 0$, $\lim x = +\infty$ est la découverte de M. E. Borel [1] et M. G. Mittag-Leffler en parle à plusieurs occasions [2].

Il me semble du plus haut intérêt qu'il ne subsiste pas seulement pour $\lim x = +\infty$ mais z étant fixé pour chaque valeur x qui est point régulier de la fonction analytique défini par la série de Taylor $\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azx)^{\lambda}}{\Gamma(a+\lambda+1)}$ à rayon de convergence fini plus grand que zéro.

---

[1] Voir : *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1901.

[2] Par exemple, Sur la représentation, etc., *Acta Math.*, T. 26 (1902), p. 374.

V

Comme dernière application de la méthode exposée je reviens à l'équation (3) pour $\alpha = 1$.

$$x\frac{dy}{dx} - xp(x)y = x \cdot \varphi(x) \ , \tag{22}$$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ ,$$

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m x^m$$

$p(x)$ et $\varphi(x)$ étant des séries de Taylor à rayon de convergence non nul. L'intégrale de l'équation sans second membre est

$$y_1(x) = e^{\int_0^x p(\xi)d\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} E(n)x^n \ , \tag{4}$$

et il reste à calculer les différentes parties de la formule (9) pour le cas présent.

$$\left|\frac{V(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{y_1(t)} \ .$$

Le théorème du second cas dans I montre qu'on aura

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \ ,$$

et l'on obtient

$$D_n = (n+1)A_{n+1} - \sum_{\lambda=0}^{n} b_{n-\lambda} \cdot A_\lambda \ .$$

Je dispose des $A_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda} z^\lambda$ de la manière suivante :

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	0	0	0	0 .
1	$E(1)a_0$	0	0	0 .
2	$E(2)a_0$	$E(2)a_1$	0	0 .
3	$E(3)a_0$	$E(3)a_1$	$E(3)a_2$	0 .

d'où

$$A_0 = 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n = E(n) \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r ,$$

et par suite

$$D_n = (n+1)E(n+1)\sum_{r=0}^{n} a_r z^r - \sum_{\lambda=0}^{n} b_{n-\lambda} E(\lambda) \left\{ \sum_{r=0}^{\lambda-1} a_r z^r \right\}$$

$$= (n+1)E(n+1)a_n z^n + \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \left[(n+1)E(n+1) - \sum_{\mu=0}^{n-1-r} b_\mu E(n-\mu) \right]$$

$$= \sum_{r=0}^{n} d_{n,r} a_r z^r .$$

Donc on est arrivé à l'équation

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} E(n) x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n}$$

$$= \int_0^x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n [d_{n,0} a_0 + d_{n,1} a_1 z + \dots + d_{n,n} a_n z^n] \right\} \frac{dt}{y_1(t)} . \qquad (23)$$

Pour le moment je considère cette formule seulement en supposant $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n$ fonction entière transcendante. Dans ce cas M. Mittag-Leffler[1] donne pour l'expression à gauche dans (23) la valeur

$$= \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{y_1(x)} \int_S \frac{F(z.y)}{y-1} \cdot y_1\left(\frac{x}{y}\right) dy . \qquad (24)$$

où

$$F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r .$$

Le contour S doit être la limite d'une surface simplement

[1] Voir : Sur la représentation, etc., *Acta Math.*, T. 29, p. 170.

connexe pour laquelle la fonction $F(z.y)$ reste régulière; il doit être parcouru dans le sens direct et embrasser les deux points $y = 0$, $y = 1$.

En discutant l'intégrale curviligne M. G. Mittag-Leffler a démontré que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E(n)x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} E(n)x^n} = FA(z) \tag{25}$$

est uniformément convergente pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A et représente la branche fonctionnelle $FA(z)$ partout à l'intérieur de cette étoile, si la fonction entière $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(n)x^n$ est choisie telle que :

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x.u)}{y_1(x)} = \lim_{x=\infty} e^{\int_0^{x.u} p(\xi)d\xi - \int_0^{x} p(\xi)d\xi} = 0$$

d'une manière uniforme tant que u appartient à un domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel positif compris entre $x = 1$ et l'infini. Cette condition est satisfaite par toute fonction entière

$$\int_0^x p(\xi)\,d\xi = T(x) \tag{26}$$

possédant la propriété :

$$\lim_{r=\infty} T(r.e^{i\varphi}) = 0$$

uniformément pour

$$\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon\ ,$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit,

$$\lim_{r=\infty} T(r.e^{i\varphi}) = \infty \qquad \text{pour} \qquad \varphi = 0\ .$$

En outre M. Mittag-Leffler démontre que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(n)x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} |a_r z^r|\right)$$

est pour toute valeur de z une série toujours convergente par rapport à x. Elle est, x étant fixé, uniformément convergente pour un domaine quelconque de la variable z. $p(x) = \mathrm{T}'(x)$ est fonction entière transcendante, donc $\varphi(x) = \mathrm{V}'(x) - p(x).\mathrm{V}(x)$ est une série de x et de z qui partage avec $\mathrm{V}(x)$ les deux propriétés exposées il y a un moment. La fonction entière transcendante $y_1(x) = e^{\mathrm{T}(x)}$ ne s'annule pour aucune valeur finie x et par suite l'intégrale dans (23) a un sens pour chaque valeur finie x.

En passant à la limite on est conduit à cause de (25) à la formule

$$\int_0^\infty \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n [d_{n,0} a_0 + d_{n,1} a_1 z + \dots + d_{n,n} a_n z^n] \right\} \frac{dt}{y_1(t)} = \mathrm{FA}(z) \,. \qquad (27)$$

L'intégrale converge uniformément pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A. C'est une généralisation de l'intégrale Laplace-Abel, de l'intégrale de M. Mittag-Leffler et une formule analogue à la troisième des formules (125) p. 177 démontrées par M. Mittag-Leffler (*Acta Math.* t. 29).

Je termine par la remarque que les applications de la méthode exposée peuvent être augmentées considérablement, car elle contient trois éléments arbitraires : 1. l'équation différentielle de liaison d'ordre quelconque ; 2. le point x_0, qui peut être point singulier de cette équation différentielle en lequel toutes ses intégrales sont régulières ou point singulier en lequel les intégrales sont irrégulières ; 3. le chemin d'intégration.

D'autres résultats que j'ai obtenus paraîtront dans la *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich* [1].

Küsnacht (Zürich), octobre 1916.

---

[1] « Neue Entwicklungen über die Abel'sche Integralumkehrungsformel. » Jahrgang 62 (1917).