MODULE D'UNE SOMME

Autor(en): **Petrovitch, Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17316

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

MODULE D'UNE SOMME

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

La proposition élémentaire et intuitive, d'après laquelle le module d'une somme Σu_k est au plus égal à la somme de modules des u_k, est fréquemment utilisée dans des démonstrations et dans des calculs approchés. Les propositions aussi intuitives qui suivent, fournissant à la fois des limites inférieures et supérieures du module d'une somme, pourraient également rendre de pareils services.

I. — Soient

$$u_1 = a_1 + ib_1 , \qquad u_2 = a_2 + ib_2 , \qquad u_3 = a_3 + ib_3 , \ldots$$

plusieurs quantités complexes. On a

$$\text{mod}\, \Sigma u_k = \sqrt{P^2 + Q^2} ,$$

où P et Q désignent les valeurs absolues de Σa_k et Σb_k.

L'inégalité et l'identité

$$1 \geqq \frac{P^2 + Q^2}{(P+Q)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)^2$$

font voir que

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{P^2 + Q^2}{(P+Q)^2} \leqq 1 .$$

Donc: *le module d'une somme* Σu_k *a pour valeur* $\theta(P+Q)$, *où* P *désigne la valeur absolue de la somme de parties réelles des* u_k, Q *désigne la valeur absolue de la somme de coeffi-*

cients de i *des* u_k *et* θ *désigne un facteur dont la valeur est toujours comprise entre* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* 1.

La limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est effectivement atteinte lorsque $P = Q$ et la limite 1 lorsque les u_k sont tous réels, ou bien tous imaginaires.

On voit, par exemple, aussi que

$$\log \operatorname{mod} \Sigma u_k = \log (P + Q) - \delta ,$$

où δ est une quantité positive plus petite que $\frac{1}{2} \log 2$. Si le logarithme est vulgaire, δ est compris entre 0 et 0,15051...; s'il est naturel, δ est compris entre 0 et 0,34657...

Rappelons que lorsque P et Q sont des mêmes signes, la somme $P + Q$ coïncide avec la valeur absolue du coefficient de i de l'expression $(1 + i)\Sigma u_k$, et que, si P et Q sont des signes contraires, cette somme coïncide avec la valeur absolue de la partie réelle de la même expression, comme il résulte de la formule

$$(1 + i)\Sigma u_k = (P - Q) + i(P + Q) .$$

II. — Ce qui précède n'assujettit les qualités u_k à aucune restriction. Supposons maintenant que toutes leurs parties réelles a_k aient un même signe, aussi que tous les coefficients b_k de i, les deux signes pouvant d'ailleurs être quelconques.

En désignant par α_k la valeur absolue de a_k et par β_k la valeur absolue de b_k on aura

$$\operatorname{mod} u_k = \operatorname{mod} (\alpha_k + i\beta_k)$$

et par suite, en vertu de ce qui précède

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_k + \beta_k) \leq \operatorname{mod} u_k \leq \alpha_k + \beta_k .$$

Faisons $k = 1, 2, 3, \ldots$ et ajoutons membre à membre les équations ainsi obtenues. En remarquant que les a_k étant tous de même signe, ainsi que les b_k, on aura

$$\Sigma\alpha_k = \text{val. abs. de } \Sigma a_k = P , \qquad \Sigma\beta_k = \text{val. abs. de } \Sigma b_k = Q ;$$

on obtient ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(P + Q) \leq \Sigma \bmod u_k \leq P + Q ,$$

ou encore

$$\Sigma \bmod u_k = \lambda (P + Q) , \tag{1}$$

avec

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda \leq 1 .$$

Le facteur λ atteindra sa valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ limite lorsqu'on a à la fois

$$a_1 = b_1 \qquad a_2 = b_2 \qquad a_3 = b_3 , \ldots$$

et la limite 1 lorsque dans chaque paire de quantités (a_k, b_k) l'une ou l'autre d'elles est nulle.

En comparant l'équation (1) avec l'équation

$$\bmod \Sigma u_k = \theta(P + Q) , \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \theta \leq 1$$

résultant de ce qui précède, on tire

$$\bmod \Sigma u_k = \frac{\theta}{\lambda} \Sigma \bmod u_k .$$

Le rapport $\frac{\theta}{\lambda}$ atteindra sa plus petite valeur possible lorsqu'on a à la fois $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lambda = 1$; pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'on ait $P = Q$ et que, de plus, dans chaque paire de quantités (a_k, b_k) l'une ou l'autre soit nulle. Le rapport $\frac{\theta}{\lambda}$ a alors la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La plus grande valeur du même rapport est d'ailleurs manifestement 1, car on a toujours

$$\bmod \Sigma u_k \leq \Sigma \bmod u_k ;$$

cette limite 1 est effectivement atteinte lorsque ou bien tous les a_k à la fois, ou bien tous les b_k à la fois sont nuls (et l'on a alors à la fois $\theta = 1$, $\lambda = 1$).

On arrive ainsi à la proposition suivante :

Lorsque dans une somme Σu_k *les parties réelles des* u_k *sont d'un même signe et qu'en même temps les coefficients de* i *dans les* u_k *ont tous un même signe, on a*

$$\text{mod}\ \Sigma u_k = \mu \Sigma\ \text{mod}\ u_k$$

où μ *est un facteur dont la valeur est comprise entre* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* 1.

La limite $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est effectivement atteinte lorsque chacun des termes u_k est réel ou purement imaginaire, et que, de plus, la somme de termes u_k réels et la somme de coefficients de i des u_k purement imaginaires sont égales en valeurs absolues. La limite $\mu = 1$ est atteinte lorsque les termes u_k sont à la fois *tous* réels ou bien *tous* purement imaginaires.

Remarquons que dans le cas considéré (les a_k et les b_k des mêmes signes respectifs) *la différence entre le logarithme du module d'une somme et le logarithme de la somme de modules est toujours négative et plus petite en valeur absolue que* $\frac{1}{2}\log 2$.

Genève, janvier 1917.