SUR QUELQUES FONCTIONS DES COTÉS ET DES ANGLES D'UN TRIANGLE

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

I. — *Une fonction des angles.*

Soient a, b, c les côtés d'un triangle, α, β, γ les angles qui leur sont opposés. Envisageons la fonction des angles

$$(1) \qquad \varphi(\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma) = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha.\ \sin\beta.\ \cos\gamma}}{\sin\alpha + \sin\beta}\ .$$

En posant pour abréger

$$\sin\alpha = \xi\ , \qquad \sin\beta = \eta\ ,$$

l'identité

$$2\xi\eta = (\xi + \eta)^2 - (\xi^2 + \eta^2)$$

transforme l'expression (1) en

$$\varphi(\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma) = \sqrt{\lambda(1 + \cos\gamma) - \cos\gamma}\ ,$$

où

$$\lambda = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi + \eta)^2}\ .$$

Or, l'inégalité et l'identité

$$1 \geqq \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi + \eta)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}\right)^2$$

montrent que

$$\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq 1\ ,$$

la limite inférieure $\frac{1}{2}$ étant atteinte pour $\xi = \eta$ et la limite supérieure 1 lorsque l'une des valeurs ξ et η est négligeable par rapport à l'autre.

On en conclut

$$\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2} - \cos\gamma} \leqq \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \leqq 1 ,$$

ou encore

$$\cos\frac{\pi-\gamma}{2} \leqq \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \leqq 1 .$$

Par suite

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1+\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}{2} \pm \delta ,$$

avec

$$\delta \leqq \frac{1-\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}{2} ,$$

ou bien encore

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos\frac{2\pi-\gamma}{4} \pm \delta , \tag{2}$$

avec

$$\delta \leqq \sin\frac{\pi-\gamma}{4} . \tag{3}$$

L'égalité (3) aura lieu : 1° pour $\xi = \eta$; 2° lorsque l'une ou l'autre des quantités ξ et η devient négligeable par rapport à l'autre. Au premier cas correspond

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4} - \sin^2\frac{\pi-\gamma}{4} = \cos\frac{\pi-\gamma}{2}$$

et au second

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4} + \sin^2\frac{\pi-\gamma}{4} = 1 .$$

On en conclut que

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4}(1 \pm \varepsilon) \tag{4}$$

où l'erreur relative ε *ne surpasse jamais la grandeur* $\mathrm{tg}^2\frac{\pi-\gamma}{4}$;

cette erreur est nulle pour le cas où $\alpha = \beta$, *et atteint son maximum* $\operatorname{tg}^2\frac{\pi - \gamma}{4}$ *lorsque l'un des deux angles* α *et* β *tend vers zéro.*

La proposition présente un intérêt particulier pour les triangles à angle γ *obtus*. Dans ce cas *en prenant pour* $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ *la valeur* $\cos^2\frac{\pi - \gamma}{4}$ *l'erreur relative commise* ε *n'atteint jamais la valeur*

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} = 0{,}171$$

et cette erreur décroît rapidement lorsque l'angle γ *s'approche de 180°.*

Ainsi, l'on a

$$(5) \qquad \begin{array}{lll} \text{pour} & \gamma > 120^\circ & \varepsilon < 0{,}070 \\ & \gamma > 140^\circ & \varepsilon < 0{,}040 \\ & \gamma > 150^\circ & \varepsilon < 0{,}018 \\ & \gamma > 160^\circ & \varepsilon < 0{,}007 \\ & \gamma > 170^\circ & \varepsilon < 0{,}002 \\ & \gamma > 175^\circ & \varepsilon < 0{,}0003\,. \end{array}$$

Les triangles pour lesquels l'erreur relative ε est, en valeur absolue, plus petite qu'une valeur ε' donnée à l'avance, sont ceux pour lesquels l'angle γ, exprimé en parties de π, est plus grand que la différence

$$\pi - 4 \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon'}\,,$$

où, pour ε' suffisamment petit

$$\gamma < \pi - 4\sqrt{\varepsilon'}\,.$$

A l'aide de ce qui précède on peut, par exemple, calculer, avec une approximation connue à l'avance, *le troisième côté d'un triangle dont on ne connaît que la somme* a + b *de deux côtés et l'angle obtus* γ *qu'ils forment entre eux.*

En effet, désignons par h la somme donnée; des

$$a + b = h\,, \qquad \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

on tire

$$a = h \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta}, \qquad b = h \frac{\sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$$

et par suite

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma} = h\varphi(\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma)\ .$$

Il s'ensuit que

$$(6) \qquad c = (a + b) \cos^2 \frac{\pi - \gamma}{4} (1 \pm \varepsilon\ ),$$

où l'erreur relative ε *est celle commise sur la fonction* φ *qu'on vient d'étudier.*

En prenant

$$(7) \qquad c = (a + b) \cos^2 \frac{\pi - \gamma}{4}$$

on commet une erreur relative qui pour les angles γ supérieurs à 140° n'atteindra pas 4 %, pour les angles supérieurs à 150° 1,8 %, pour les angles supérieurs à 160° 0,7 %, pour les angles supérieurs à 170° 0,2 %, etc.

II. — *Une fonction des côtés.*

L'identité

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2$$

écrite sous la forme

$$(8) \qquad 1 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} = \frac{1}{3} + \frac{(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2}{3(a + b + c)^2}$$

montre que, a, b, c étant des quantités positives, dont une ou deux peuvent être nulles, la valeur du rapport

$$(9) \qquad \mu = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a + b + c}$$

est toujours comprise entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et 1, la limite inférieure $\frac{1}{\sqrt{3}}$ étant atteinte pour $a = b = c$ et la limite supérieure 1 étant atteinte lorsque deux de ces trois quantités deviennent négligeables par rapport à la troisième.

Or, *dans le cas plus particulier où* a, b, c *sont les trois côtés d'un triangle, la limite supérieure* 1 *est à remplacer par* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

En effet, dans ce cas chacune des trois valeurs a, b, c est au moins égale à la différence et au plus égale à la somme de deux autres. Soit, pour fixer les idées

$$a \leqq b \ , \qquad b - a \leqq c \leqq b + a \ ;$$

posons

$$c = x \ , \qquad a^2 + b^2 = m \ , \qquad a + b = n \ ,$$

de sorte qu'on ait

$$\mu = \frac{\sqrt{m + x^2}}{n + x} \ . \tag{10}$$

On a

$$\mu' = \frac{nx - m}{u} \ , \qquad \mu'' = \frac{nx - \mu' u'}{u} \ ,$$

avec

$$u = (x + n)^2 \sqrt{m + x^2} \ ,$$

de sorte que μ présente un minimum unique atteint pour la valeur

$$x = \frac{m}{n} = \frac{a^2 + b^2}{a + b} \ , \tag{11}$$

laquelle est manifestement comprise entre $b - a$ et $b + a$, et la valeur même de ce minimum est

$$y = \sqrt{\frac{m}{m + n^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + (a + b)^2}} \tag{12}$$

atteignant bien la valeur $\frac{1}{\sqrt{3}}$ pour $a = b$.

Lorsque x décroît de

$$x = \frac{m}{n} \ , \qquad \text{à} \qquad x = b - a \ ,$$

μ croît depuis sa valeur minimum unique (12) jusqu'à la valeur

$$\mu = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + (b-a)^2}}{2b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2} \tag{13}$$

laquelle, en vertu de $\frac{a}{b} \leqq 1$ est au plus égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc : a, b, c *étant les côtés d'un triangle, la valeur du rapport*

$$\mu = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a + b + c}$$

est toujours comprise entre les deux nombres

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774 \ldots , \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071 \ldots .$$

On peut l'exprimer sous la forme de l'égalité

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = (A + \theta B)(a + b + c) , \tag{14}$$

où A *et* B *sont les constantes numériques ayant pour valeurs*

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774 \ldots , \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}1297 \ldots , \tag{15}$$

et où θ *représente un nombre compris entre* 0 *et* 1.

La limite inférieure $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (correspondant à $\theta = 0$) est atteinte pour les triangles isocèles ; la limite supérieure $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (correspondant à $\theta = 1$) est atteinte lorsque

$$a = b , \qquad c = 0 .$$

Applications. — On peut en faire bien des applications dont nous n'indiquerons que les suivantes, à titre d'exemples.

I. La relation connue

$$m^2 + n^2 + p^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

entre les longueurs m, n, p des médianes d'un triangle dont les côtés sont a, b, c, conduit, d'après la proposition précédente, à la relation

$$\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = \omega(a + b + c) , \tag{16}$$

où ω est un nombre compris entre

$$\frac{1}{2} = 0,5000 \ldots , \quad \text{et} \quad \sqrt{\tfrac{3}{8}} = 0,6124 \ldots ,$$

La longueur de la diagonale L d'un parallélipipède rectangle ayant pour côtés les trois médianes d'un triangle, est donc égale au périmètre S de ce même triangle multiplié par un coefficient numérique toujours compris entre 0,5000 et 0,6124.

On voit aussi que les seuls triangles rectangles pouvant avoir leurs deux cathètes égales aux longueurs L et S rattachées à un même triangle, sont ceux ayant leurs deux angles aigus compris : l'un entre 26°30′ et 31°30′, l'autre entre 58°30′ et 63°30′.

II. La résultante de trois vecteurs susceptibles de former un triangle et ayant pour somme scalaire S, a pour valeur λS, où λ est un coefficient numérique compris entre 0,5774 ... et 0,7071 ...

III. Etant données trois fonctions

$$f_1(x) , \quad f_2(x) , \quad f_3(x)$$

positives dans l'intervalle de $x = a$ à $x = b$ et telles que dans cet intervalle on ait constamment

$$f_3 - f_1 \leqq f_2 \leqq f_3 + f_1 , \tag{17}$$

on aura

$$\int_a^b dx \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} = (\mathrm{A} + \theta\mathrm{B})\left[\int_a^b f_1\,dx + \int_a^b f_2\,dx + \int_a^b f_3\,dx\right] , \tag{18}$$

où A et B sont les constantes numériques (15) et où θ est un nombre compris entre 0 et 1.

IV. Considérons un arc d'une courbe gauche le long duquel, en le parcourant dans une direction déterminée, toutes les trois coordonnées x, y, z croissent à la fois et de telle façon que leurs accroissements infiniment petits simultanés sont à chaque instant susceptibles de former un triangle.

La longueur de l'arc sera égale à la somme des accroissements finis des coordonnées, correspondant au passage d'une extrémité de l'arc à l'autre, multipliée par un coefficient numérique toujours compris entre 0,5774... *et* 0,7071...

Lorsque, par exemple, les équations de la courbe sont

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

les conditions précédentes qui sont

$$0 \leqq dy - dx \leqq dz \leqq dy + dx$$

(ou bien celles qu'on aurait en intervertissant x, y, z), se résument en inégalités suivantes devant être vérifiées pour tous les points de la courbe sur l'arc considéré :

$$\text{(19)} \qquad O \leqq \frac{P - T}{T} \leqq \frac{Q}{T} \leqq \frac{P + T}{T}$$

où

$$\text{(20)} \qquad P = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{vmatrix}, \qquad Q = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad T = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

III. — *Fonctions symétriques des côtés ou des angles.*

Soit $f(x)$ une fonction de x développable, au voisinage de $x = 0$, en séries de puissances

$$\text{(21)} \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

chaque coefficient a_i étant positif ou nul, les deux premiers coefficients a_0 et a_1 pouvant d'ailleurs être réels quelconques.

Partons du fait suivant facile à démontrer : la valeur du rapport

$$\text{(22)} \qquad \frac{(x + y + z)^p}{x^p + y^p + z^p},$$

où x, y, z, p sont des quantités positives, est toujours comprise entre 1 et 3^{p-1} ; la limite 1 est atteinte lorsque $p = 1$ ou lorsque deux des quantités x, y, z sont négligeables par rapport à la troisième ; la limite 3^{p-1} est atteinte lorsque $x = y = z$.

On tire pour $p = 2, 3, 4 \dots$

$$a_k(x + y + z)^k \geqq a_k(x^k + y^k + z^k) \,, \tag{23}$$

$$a_k(x + y + z)^k \leqq \frac{a_k}{3}[(3x)^k + (3y)^k + (3z)^k] \,. \tag{24}$$

$$(k = 2, 3, 4 \dots)$$

En supposant la somme $x + y + z$ plus petite que le rayon de convergence de la série (21), de (23) on tire

$$f(x) + f(y) + f(z) \leqq f(x + y + z) + 2f(0) \,, \tag{25}$$

et de (24), en y remplaçant $3x$, $3y$, $3z$ par x, y, z, on tire d'abord

$$a_k\left(\frac{x + y + z}{3}\right)^k \leqq \frac{a_k}{3}(x^k + y^k + z^k)$$

et à l'aide de ceci

$$f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) \leqq \frac{1}{3}[f(x) + f(y) + f(z)] \,,$$

ou encore

$$f(x) + f(y) + f(z) \geqq 3f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) . \tag{26}$$

On a ainsi la double inégalité

$$3f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) \leqq f(x) + f(y) + f(z) \leqq f(x + y + z) + 2f(0) \,, \tag{27}$$

qui se laisse exprimer par l'égalité

$$f(x) + f(y) + f(z) = \mathrm{F}(x + y + z) + \theta\Phi(x + y + z) \,, \tag{28}$$

où

$$\mathrm{F}(t) = 3f\left(\frac{t}{3}\right) , \qquad \Phi(t) = f(t) - 3f\left(\frac{t}{3}\right) + 2f(0) \,, \tag{29}$$

et où θ désigne un coefficient compris entre 0 et 1. Ces deux limites 0 et 1 sont atteintes pour une fonction $f(t)$ arbitraire lorsque deux des quantités x, y, z tendent vers zéro ($\theta = 1$), ou bien lorsque $x = y = z$ ($\theta = 0$).

Appliquons maintenant la proposition aux deux cas suivants :

Premier cas : x, y, z *sont les trois côtés d'un triangle.* En désignant par s le périmètre du triangle, la formule (28) fournit

$$f(a) + f(b) + f(c) = \mathrm{F}(s) + \theta\Phi(s) , \tag{30}$$

F et Φ étant les deux fonctions (29). La limite inférieure $\theta = 0$ est atteinte pour le triangle isocèle ; la limite supérieure $\theta = 1$ n'est jamais atteinte.

Deuxième cas : x, y, z *sont les trois angles d'un triangle exprimés en parties de* π. La formule (28) fournit

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = \mathrm{F}(\pi) + \theta\Phi(\pi) , \tag{31}$$

F et Φ étant les deux fonctions (29). La limite inférieure $\theta = 0$ est atteinte pour le triangle isocèle et la limite supérieure $\theta = 1$ pour le triangle équilatère à un angle obtus voisin de π.

Les formules (30) *et* (31) *fournissent des expressions remarquables des fonctions symétriques des côtés ou des angles d'un triangle.*

Rappelons que ces formules supposent la fonction $f(t)$ développable, au voisinage de $t = 0$, en série de puissances

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots , \tag{32}$$

où chaque coefficient a_i est positif ou nul, les deux premiers coefficients a_0 et a_1 pouvant être réels quelconques. De plus la formule (30) suppose la convergence de la série (32) pour $t = s$ et la formule (31) la convergence de la série $t = \pi$.

En prenant, par exemple,

$$f(t) = e^t ,$$

on trouve pour un triangle quelconque

$$e^\alpha + e^\beta + e^\gamma = \mathrm{M} + \theta\mathrm{N} ,$$

où M et N sont deux constantes numériques ayant pour valeurs

$$M = 3e^{\frac{\pi}{3}} = 8{,}548\ 96 \ldots , \qquad N = 2 + e^{\pi} - 3e^{\frac{\pi}{3}} = 16{,}591\ 34 \ldots$$

Nous remarquerons en terminant que les formules (27) et (28) ne sont qu'un cas particulier d'un théorème général exprimant la relation entre la moyenne arithmétique d'un nombre quelconque de quantités positives, et une fonction symétrique arbitraire de ces quantités, qui sera exposé dans un autre Mémoire.

Glion s. Montreux, février 1916.

THÉORÈME SUR LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE DE QUANTITÉS POSITIVES

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

---

1. — Soit $f(x)$ une fonction développable, au voisinage de $x = 0$, en série de puissances

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots , \tag{1}$$

chaque coefficient a_i étant réel et positif ou nul, les deux premiers coefficients a_0 et a_1 pouvant, d'ailleurs, avoir des valeurs réelles quelconques.

Soient $x_1, x_2, \ldots , x_n$ des quantités réelles et positives, dont la somme est plus petite que le rayon de convergence de la série (1).

Désignons par

$$\mu = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \qquad \text{et} \qquad M = \frac{f(x_1) + \ldots + (f x_n)}{n}$$