

ESSAI SUR LA THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION DANS LES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Autor(en): **Zaremba, S.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16869>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ESSAI SUR LA THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION DANS LES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

S. ZAREMBA, professeur à l'Université de Cracovie.

INTRODUCTION.

Les paradoxes apparents qui surgissent dans les sciences mathématiques à mesure que les questions étudiées croissent en généralité et en abstraction, ont induit les mathématiciens à apporter une rigueur toujours plus grande dans les démonstrations et à faire un sujet spécial d'étude de la forme savante qu'assume la méthode déductive dans leur science. Mais, jusqu'à présent, on s'est plutôt appliqué à rechercher les éléments les plus simples en lesquels le raisonnement peut être décomposé, à classer ces éléments et à imaginer des systèmes de symboles propres à les représenter avec brièveté et précision, qu'à étudier la démonstration comme un tout. C'est par exemple dans ce sens qu'ont été dirigés les travaux fondamentaux de M. Peano et de ses élèves. Or, il me semble que, pour l'intelligence et la critique des branches les plus délicates et les plus abstraites des mathématiques modernes, comme par exemple la recherche des fondements de la Géométrie ou de l'Arithmétique, ou encore la théorie des Ensembles, il est nécessaire de connaître, dans leurs traits essentiels, la structure et les propriétés de la démonstration mathématique, ainsi que les applications de ces notions au problème délicat de la compatibilité et de l'indépendance d'un système de propositions données.

C'est précisément à l'étude de ces questions que je consacre le présent travail.

Je ne ferai usage d'aucun système particulier de symboles, mais j'ose espérer que cette circonstance ne nuira en rien à la clarté et à la précision de l'exposition.

Loin de chercher à épuiser le sujet, je me suis efforcé de me borner aux questions auxquelles je croyais pouvoir répondre avec sûreté.

Bien que le domaine que j'étudie appartienne presque entièrement à celui de la logique générale, je ne donne, à dessein, que des exemples tirés des éléments des mathématiques. Ces exemples sont peut-être moins simples que d'autres qu'il serait aisé d'imaginer mais, à cause de la précision de tout ce qui est du domaine des mathématiques, je les crois particulièrement adaptés au but que j'avais en vue.

Dans un travail comme celui-ci, il est impossible de préciser les influences variées sous lesquelles se sont développées les idées que l'on expose, mais je dois dire que je dois beaucoup à mon distingué collègue M. Jean SLESZYNSKI, lequel ne s'est pas encore décidé à publier ses longues et profondes recherches dans le domaine de la logique, mais se fait un plaisir d'en faire part à ses amis dans des conversations privées.

J'ajoute que je reproduis, dans ce travail, avec quelques perfectionnements, l'aperçu que j'ai placé au début du premier volume de mon *Introduction à l'Analyse* publiée en langue polonaise à Varsovie.

I. — POSTULATS, DÉFINITIONS, THÉORÈMES.

§ 1. — Les propositions dont l'ensemble exprime tout ce qui est affirmé dans une théorie déductive et, par conséquent, dans toute théorie mathématique se divisent en deux catégories, à savoir :

1° Les propositions regardées comme vraies sans aucune démonstration et que, à défaut d'un terme classique, j'appellerai *prémises* ;

2° les *théorèmes* ou propositions appuyées de démonstrations.

§ 2. — Il existe une catégorie particulière de prémisses appelées *définitions*. On entend par « définition » toute proposition qui exprime une convention en vertu de laquelle le sens d'une expression (qui peut être un mot, une phrase ou quelque autre symbole) devra être considéré comme identique à celui d'une certaine autre expression plus ou moins compliquée, mais uniquement formée de termes considérés comme clairs par eux-mêmes ou définis antérieurement. Voici par exemple la définition ordinaire des droites parallèles : « l'assertion que deux droites indéfinies sont parallèles exprime que ces droites sont situées dans un même plan et n'ont aucun point commun ».

D'après ce qui précède on peut, sans altérer en rien le contenu d'une théorie, supprimer toute prémisses qui est une définition à condition de remplacer partout l'expression dont le sens est déterminé au moyen de la définition, par la phrase qui, aux termes de celle-ci, a le sens de l'expression considérée. Cette remarque permet de constater qu'une prémisses peut, comme une définition, être une proposition vraie seulement parce que l'on est convenu d'interpréter un certain terme de façon qu'il en soit ainsi, sans que la prémisses considérée soit une définition au sens précis que nous avons attribué à ce mot. Ainsi, par exemple, si en énonçant les prémisses de la Géométrie, on disait que le mot « droite » sera considéré comme ayant le sens voulu pour que la proposition « deux droites qui ont deux points communs se confondent » soit une proposition vraie, on énoncerait une prémisses qui ne pourrait pas être regardée comme une définition, même dans le cas où elle exprimerait tout ce qui est affirmé en Géométrie sans démonstration au sujet des droites. En effet, la prémisses que nous venons de considérer ne permettrait pas, comme devrait le permettre une véritable définition, de faire disparaître, dans la Géométrie, le mot « droite », en le remplaçant par une périphrase convenable.

Toute prémisses qui n'est pas une définition s'appelle *postulat*.

§ 3. — Il est utile d'insister un peu sur la notion de définition. Il est tout d'abord évident qu'il serait parfaitement

absurde de rechercher la démonstration d'une définition, mais il ne faudrait pas en conclure que les définitions puissent être posées d'une façon absolument arbitraire. Une définition peut devoir être écartée non seulement à cause de son peu de fécondité, mais encore parce qu'elle peut être absurde et dès lors absolument inadmissible. En effet, il peut arriver qu'il soit impossible d'attribuer à une expression le sens voulu par la définition correspondante parce que la chose que cette expression devrait désigner n'existe pas ; j'ajoute que, dans la pratique, c'est ordinairement de là que dérive l'inadmissibilité des définitions incorrectes. Par conséquent, l'existence de la chose que doit désigner une expression en vertu de sa définition doit être ou un théorème dûment démontré, ou un postulat.

D'ailleurs, lorsqu'une définition ne donne pas lieu à l'objection précédente et lorsque, de plus, l'expression qu'elle définit n'a pas été précédemment employée, la définition considérée peut être plus ou moins heureusement choisie, mais elle peut sûrement être adoptée sans contrevenir aux règles de la logique.

§ 4. — Il importe de faire remarquer que, dans les démonstrations, le rôle des définitions ne diffère en rien de celui des postulats. Ainsi par exemple, dans la démonstration d'un théorème relatif aux droites parallèles, on n'a nullement à tenir compte du fait que l'équivalence des deux propositions suivantes : « deux droites sont parallèles » et « deux droites sont situées dans un même plan et n'ont aucun point commun », dérive d'une convention ; la seule chose qui importe est cette équivalence elle-même.

§ 5. — Il est aisé de comprendre pourquoi les théories deductives, relativement parfaites, sont hérissées de définitions. En effet, la précision d'une proposition est une condition nécessaire (quoique insuffisante) de son exactitude, car l'épithète de vraie ou fausse ne peut évidemment être attribuée à une proposition que dans le cas où l'on sait bien ce qui est affirmé par cette proposition. Il est donc indiqué d'éviter, dans la mesure du possible, l'emploi d'expressions (ou d'autres symboles) dont le sens exact n'aurait pas été déter-

miné au moyen de définitions. Toutefois, il est impossible de se passer de termes non définis, considérés par conséquent comme clairs et précis par eux-mêmes. En effet, dans toute théorie, il devra y avoir une définition qui précède toutes les autres et, dans celle-ci, le terme défini par elle devra l'être au moyen de termes non définis.

§ 6. — Pour terminer ces considérations sommaires sur les prémisses d'une théorie, nous allons mettre en évidence la relativité des notions de définition, de postulat et de théorème. Lorsqu'une théorie (T) fait suite à d'autres théories (T'), on peut à volonté considérer la théorie (T) comme un tout isolé ou comme une partie d'une théorie plus étendue, englobant la théorie (T) et les théories (T'). Dans le premier cas, les postulats de la théorie (T) comprendront en particulier tous les théorèmes des théories (T'), dans le second cas, au contraire, aucun théorème de la théorie (T') ne fera partie de l'ensemble des postulats de la théorie formée par la réunion des théories (T) et (T').

Il peut arriver aussi que, étant donné une théorie (T), on en isole momentanément une partie (T₀) pour l'étudier comme un tout. Dans ce cas, les théorèmes qui, dans la théorie (T), précèdent la partie (T₀) de celle-ci, devront être considérés comme faisant partie des postulats de la théorie (T₀). Ainsi par exemple, quand on veut soumettre la démonstration d'un théorème particulier d'une théorie à une étude approfondie, on regarde ce théorème et sa démonstration comme formant une théorie à part, et alors tout théorème antérieurement démontré et intervenant dans la démonstration du théorème considéré acquiert le caractère d'un postulat.

La relativité de la notion de postulat apparaît encore à un tout autre point de vue. Ayant une théorie à exposer, on peut, sans altérer en rien les résultats de celle-ci et sans contrevenir aux règles de la logique la plus impeccable, adopter au choix différents systèmes de postulats et suivant que l'on aura choisi l'un ou l'autre système de postulats, une même proposition pourra acquérir le caractère d'un postulat ou d'un théorème.

Naturellement il ne résulte pas de là que, pour constituer

une théorie mathématique, on puisse raisonnablement adopter l'un quelconque des systèmes logiquement possibles de postulats. En réalité on doit tenir compte d'une foule de circonstances telles que le degré d'évidence des postulats, la simplicité plus ou moins grande des démonstrations selon le système de postulats adoptés, etc. Mais, dans cet ordre de choses, les préférences personnelles ne peuvent jamais être complètement écartées et, en outre, l'évolution de la science nous apprend qu'il est souvent utile de remanier les théories précédemment élaborées en substituant aux postulats adoptés d'abord, un autre système de postulats. Il va sans dire qu'un remaniement d'une théorie peut porter non seulement sur les postulats, mais encore sur les définitions, et alors une proposition qui, dans un mode d'exposition, est vraie par définition peut, dans un autre mode d'exposition acquérir le caractère d'un postulat ou celui d'un théorème.

Plus tard, au § 18, nous aurons l'occasion de constater la relativité des notions de postulat et de définition encore à un nouveau point de vue.

II. — PROPOSITIONS CONDITIONNELLES. INDÉTERMINÉES POUVANT ENTRER DANS UNE PROPOSITION CONDITIONNELLE. PROPOSITIONS CONDITIONNELLES ILLUSOIRES.

§ 7. — Nous appellerons *proposition conditionnelle* toute proposition exprimant une relation de la forme suivante : lorsqu'une certaine proposition (H) est vraie, une certaine autre proposition (C) est vraie aussi ; la proposition (H) s'appellera *hypothèse* et la proposition (C), *conclusion* de la proposition conditionnelle. Toute proposition non conditionnelle s'appellera *proposition catégorique*.

La précédente division des propositions en deux catégories porte en réalité sur la forme de celles-ci et non sur le sens, car le sens d'une proposition catégorique peut toujours être rendu au moyen d'une proposition conditionnelle. Ainsi par exemple la proposition « le nombre 7 est un nombre premier » est une proposition catégorique mais, au fond,

elle n'exprime pas autre chose que la proposition conditionnelle suivante : « lorsqu'un symbole a représente le nombre 7, il représente un nombre premier ».

Bien qu'il n'y ait qu'une différence de forme entre les propositions conditionnelles et les propositions catégoriques, la distinction de ces deux genres de propositions est fondamentale pour nous à cause du caractère formel des démonstrations déductives en général et des démonstrations mathématiques en particulier.

§ 8. — Une proposition conditionnelle peut contenir un certain nombre de symboles, que nous appellerons *indéterminées* de la proposition, offrant cela de particulier que le sens de la proposition ne serait pas altéré si l'on remplaçait ces symboles par n'importe quels nouveaux symboles, pourvu que ces nouveaux symboles soient différents entre eux et différents des autres symboles entrant dans la proposition considérée. Voici un exemple d'une proposition conditionnelle contenant des indéterminées :

« Lorsque a et b représentent deux nombres réels ou complexes, l'égalité suivante :

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

a lieu ».

Il est évident que, au sens indiqué plus haut, la proposition précédente contient deux indéterminées, à savoir a et b . Il arrive souvent que, pour abrégé, on énonce une proposition conditionnelle contenant des indéterminées sans mettre celles-ci explicitement en évidence. Ainsi, par exemple, quand on dit que « deux droites dont chacune est parallèle à une troisième sont parallèles entre elles », on énonce une proposition conditionnelle contenant en réalité trois indéterminées sous-entendues qui, d'après l'hypothèse de la proposition conditionnelle considérée, représentent trois droites dont deux sont parallèles à la troisième. Nous admettrons, dans la suite, que les indéterminées de chaque proposition conditionnelle qui en contient ont été mises explicitement en évidence.

On verra, dans les chapitres suivants, combien est impor-

tant le rôle des propositions conditionnelles dans les démonstrations mathématiques.

§ 9. — Les propositions conditionnelles que l'on rencontre ordinairement dans les théories mathématiques contiennent des indéterminées et cela de telle façon qu'il est possible d'attribuer à celles-ci à volonté, soit un sens tel que l'hypothèse devienne une proposition vraie, soit tel que l'hypothèse devienne fausse. C'est ainsi que, dans le premier exemple considéré au paragraphe précédent, l'hypothèse est constituée par la proposition suivante : « les symboles u et v représentent deux nombres réels ou complexes », et cette proposition pourra être vraie ou fausse selon la signification particulière attribuée aux indéterminées. Mais il peut arriver que l'hypothèse d'une proposition conditionnelle soit inexacte dans tous les cas et cela soit parce qu'il est impossible d'attribuer aux indéterminées, quand il y en a, une signification telle que l'hypothèse devienne une proposition vraie, soit parce qu'il n'y a pas d'indéterminées et qu'en même temps l'hypothèse de la proposition conditionnelle considérée constitue une affirmation inexacte.

Nous dirons qu'une proposition conditionnelle dont l'hypothèse est inexacte est une proposition *illusoire*.

Dès que l'on a constaté qu'une proposition conditionnelle est illusoire, celle-ci perd évidemment tout intérêt, mais il en est tout autrement tant que cette circonstance n'a pas été établie et c'est ce qui fait que, dans la pratique, on est souvent conduit à considérer momentanément des propositions conditionnelles que l'on reconnaît plus tard être des propositions illusoires. Ainsi par exemple, dans la théorie des parallèles, telle qu'elle est exposée dans de nombreux traités, on rencontre, au cours d'une démonstration, la proposition illusoire suivante :

« Si deux droites, situées dans un même plan et perpendiculaires à une troisième droite, située dans ce plan, n'étaient pas parallèles, il existerait un point par lequel passeraient deux perpendiculaires à la troisième droite ».

Il est aisé de voir qu'une proposition conditionnelle illusoire ne peut en réalité jamais être ni vraie ni fausse. En

effet, aucune proposition conditionnelle ne contient un jugement relatif à la vérité ou à la fausseté de l'hypothèse ; le jugement exprimé par une proposition conditionnelle se rapporte exclusivement au cas où l'hypothèse est vérifiée. Or, pour une proposition illusoire, ce cas ne se présente pas. Donc, malgré l'apparence contraire, celle-ci n'exprime en réalité aucun jugement et, dès lors, elle ne peut être ni vraie ni fausse.

Toutefois, lorsque, sans se demander si une proposition conditionnelle donnée est illusoire, on cherche à la démontrer suivant les règles ordinaires, on peut réussir même dans le cas où la proposition considérée est en réalité illusoire. Cela étant, nous conviendrons, comme on le fait, au moins implicitement, dans tous les traités de mathématiques, de regarder l'ensemble des propositions illusoires comme une classe particulière de propositions vraies. Cette convention ne nous expose à aucune contradiction parce qu'une proposition illusoire, ne contenant en réalité aucun jugement, ne peut être en contradiction avec quelque autre proposition qu'en apparence, mais jamais en réalité ; s'il arrive par exemple que, sans tenir compte de ce qu'une proposition conditionnelle peut être illusoire, on ait démontré deux propositions conditionnelles ayant même hypothèse mais telles qu'il y ait contradictions entre les conclusions, on n'aura nullement démontré deux propositions conditionnelles qui se contredisent ; en réalité, on aura simplement établi que chacune des deux propositions considérées est illusoire ; en d'autres termes, on aura démontré l'inexactitude de l'hypothèse commune des deux propositions conditionnelles.

III. — CHAINON LOGIQUE. DÉMONSTRATIONS AFFECTANT LA FORME D'UNE SIMPLE SUITE DE CHAINONS LOGIQUES. DÉMONSTRATIONS RAMIFIÉES.

§ 10. — Avant d'aborder le sujet propre de ce chapitre, nous allons définir une expression qui permettra d'abrégier beaucoup le langage dans la suite.

Lorsque, en envisageant une proposition (T) dans une théorie, nous dirons qu'une autre proposition (P) est une proposition *reconnue vraie précédemment*, nous entendrons exprimer par là qu'elle satisfait à l'une des trois conditions suivantes :

1° Elle se confond soit avec une des prémisses énoncées avant la proposition (T), soit avec un théorème démontré avant d'énoncer cette proposition ;

2° Elle exprime une partie de tout ce qui est affirmé dans l'une des propositions qui satisfont à la condition précédente ;

3° Elle exprime la même chose que l'ensemble de certaines propositions dont chacune satisfait à l'une des deux conditions précédentes.

Ainsi par exemple, lorsqu'en développant un traité d'arithmétique, on a déjà établi chacune des deux propositions suivantes :

(α) chacun des nombres 2, 3, 5 et 7 est un nombre premier ;

(β) le nombre 11 est un nombre premier,

dans ce cas, on pourra non seulement affirmer que chacune de ces deux propositions a déjà été reconnue vraie, mais encore on aura le droit de dire que, parmi les propositions reconnues vraies, il y a des propositions comme, par exemple, les suivantes :

« Le nombre 3 est un nombre premier » ;

« chacun des nombres 2 et 11 est un nombre premier » ;
etc.

§ 11. — Supposons qu'en développant une théorie mathématique (T) on veuille démontrer un certain théorème (A_0). On pourra alors rechercher si, parmi les propositions reconnues vraies (§ 10) précédemment, il se trouve une proposition conditionnelle (C_1) ou bien telle que sa conclusion coïncide avec la proposition (A_0), ou telle qu'elle contienne au moins une indéterminée et puisse, au moyen de la substitution de symboles convenables aux indéterminées, être transformée en une proposition (C'_1) ayant pour conclusion la proposition (A_0). Supposons que l'une des conditions précédentes se vérifie et, selon que la première ou la seconde d'entre elles se présenterait, désignons par (A_1) la proposition qui cons-

titue l'hypothèse de la proposition (C_1) ou de sa transformée (C'_1) .

S'il arrive que la proposition (A_1) est une proposition reconnue vraie (§ 10) précédemment, la proposition (A_0) devra évidemment être regardée comme démontrée. Nous dirons que l'ensemble des trois propositions (A_1) , (C_1) et (A_0) constitue un *chaînon logique* ayant pour *première prémisse* la proposition (A_1) , pour *seconde prémisse* la proposition (C_1) et pour *conclusion* la proposition (A_0) .

Le lecteur n'aura pas de peine à constater que le syllogisme classique peut être regardé comme un chaînon logique de nature particulière.

§ 12. — Reprenons les notations du paragraphe précédent mais, sans rien changer aux autres hypothèses, ne supposons plus que la proposition (A_1) soit une proposition reconnue vraie (§ 10) antérieurement. Dans ce cas, la démonstration de la proposition (A_0) aura été ramenée à celle de la proposition (A_1) et l'on pourra chercher à démontrer la proposition (A_1) par la méthode que l'on avait essayé d'appliquer à la recherche de la démonstration de la proposition (A_0) . Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on conçoit comment on peut être amené à découvrir une suite de chaînons logiques vérifiant les conditions suivantes :

1° La première prémisse du premier chaînon fait partie de l'ensemble des propositions reconnues vraies antérieurement ;

2° la première prémisse de chaque chaînon, à partir du second, coïncide avec la conclusion de celui qui le précède immédiatement ;

3° la conclusion du dernier chaînon coïncide avec la proposition qu'il s'agissait de démontrer ;

4° la seconde prémisse de chaque chaînon fait partie de l'ensemble des propositions reconnues vraies (§ 10) précédemment.

Lorsqu'une suite de chaînons logiques vérifie ces quatre conditions, elle constitue évidemment une démonstration de la proposition que l'on voulait établir et cette démonstration aura la forme d'une simple suite de chaînons logiques.

Pour présenter un exemple simple du type précédent, observons que, d'après les éléments de l'Arithmétique, on a les propositions suivantes :

(A₂) Chacun des symboles 3 et 7 représente un entier impair.

(C₂) Lorsque chacun des symboles a et b représente un entier impair, le symbole ¹

$$(a + b)$$

représente un entier pair.

(C₁) Lorsque le symbole c représente un entier pair, le symbole c^2 représente un entier divisible par 4.

Ces propositions admises à titre de postulats, proposons-nous de démontrer le théorème suivant :

(A₀) Le symbole

$$(3 + 7)^2$$

représente un entier divisible par 4.

A cet effet, observons que, à la suite de la substitution du symbole

$$(3 + 7)$$

à l'indéterminée c de la proposition conditionnelle (C₁), la conclusion de celle-ci vient coïncider avec la proposition (A₀) qu'il s'agit précisément de démontrer, tandis que l'hypothèse de la proposition conditionnelle considérée prend la forme suivante :

(A₁) Le symbole

$$(3 + 7)$$

représente un entier pair.

Or, il suffit de substituer aux indéterminées a et b de la proposition conditionnelle (C₂) les symboles 3 et 7 pour que la conclusion vienne coïncider avec la proposition (A₁) et l'hypothèse — avec la prémisse (A₂). Par conséquent, la démonstration du théorème (A₀) se présente sous la forme d'une simple suite de chaînons logiques et peut être résumée

¹ Nous conserverons les parenthèses même là, où, d'ordinaire, on ne les emploie pas, pour n'avoir pas à nous appuyer sur les prémisses relatives à leur usage.

comme il suit : Il résulte des propositions (A_2) et (C_2) que la proposition (A_1) est vraie et les propositions (A_1) et (C_1) entraînent la proposition (A_0) qu'il s'agissait précisément de démontrer.

§ 13. — Lorsque le procédé exposé au § 12 ne permet pas d'arriver à la démonstration demandée, on peut quelquefois réussir à découvrir cette démonstration en combinant ce procédé avec la remarque suivante : s'il arrive que le sens d'une proposition coïncide avec celui de l'ensemble (S) de certaines autres propositions, il suffit, pour la démonstration, d'établir chacune des propositions du système (S) . La démonstration que l'on obtient de cette façon ne se réduit plus à une simple suite de chaînons logiques et prend la forme d'une combinaison d'un certain nombre de suites de ce genre. Il est naturel d'appeler *démonstrations ramifiées* les démonstrations de ce type.

Pour donner un exemple d'une démonstration ramifiée, adoptons, à titre de prémisses, les propositions suivantes :

(1) Lorsque trois entiers, a , b et c , vérifient les égalités

$$a = b \quad \text{et} \quad b = c ,$$

on a

$$a = c .$$

(2) Lorsque les symboles a et b représentent deux entiers, le symbole ¹

$$(a + b)$$

est aussi le symbole d'un nombre entier.

(3) Lorsque quatre entiers a , b , a' , b' vérifient les égalités

$$a = a' \quad \text{et} \quad b = b' ,$$

on a

$$(a + b) = (a' + b')$$

¹ Pour éviter d'énoncer les prémisses relatives à l'emploi des crochets, nous conservons ceux-ci comme nous avons eu déjà l'occasion de le faire dans un autre exemple, même là où il est d'usage de s'en passer.

- (4) Le symbole 3 représente un entier.
 (5) » 7 » »
 (6) » 8 » »
 (7) » 5 » »
 (8) » 10 » »
 (9) » 13 » »
 (10) » 23 » »
 (11) On a

$$(3 + 7) = 10$$

- (12) On a

$$(8 + 5) = 13$$

- (13) On a

$$(10 + 13) = 23 .$$

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

- (A) On a

$$((3 + 7) + (8 + 5)) = 23 .$$

Démonstration.

*Lemme I*¹. Le symbole

$$(3 + 7)$$

est celui d'un entier.

En effet, après la substitution des symboles 3 et 7 aux indéterminées a et b de la prémisse (2), l'hypothèse de celle-ci devient, en vertu des prémisses (4) et (5), une proposition vraie et la conclusion, une proposition qui coïncide avec celle qu'il s'agissait d'établir.

Lemme II. Le symbole

$$(8 + 5)$$

est celui d'un entier.

En effet, après la substitution des symboles 8 et 5 aux indéterminées a et b de la prémisse (2), l'hypothèse de celle-ci devient, en vertu des prémisses (6) et (7), une proposition vraie et la conclusion coïncide avec celle qu'il s'agissait de démontrer.

¹ On appelle *lemme* tout théorème intermédiaire qui se présente dans la démonstration d'un autre théorème, considéré comme formant l'objet propre du raisonnement que l'on développe.

Lemme III. Le symbole

$$((3 + 7) + (8 + 5))$$

est celui d'un nombre entier.

En effet, après la substitution des symboles

$$(3 + 7) \quad \text{et} \quad (8 + 5)$$

aux indéterminées a et b de la prémisse (2), l'hypothèse de celle-ci devient, en vertu des lemmes I et II, une proposition vraie et la conclusion, une proposition qui coïncide avec celle qu'il s'agissait de démontrer.

Lemme IV. Le symbole

$$(10 + 13)$$

est celui d'un nombre entier.

En effet, après la substitution des symboles

$$10 \quad \text{et} \quad 13$$

aux indéterminées a et b de la prémisse (2), l'hypothèse de celle-ci devient, en vertu des prémisses (8) et (9), une proposition vraie et la conclusion, une proposition qui coïncide avec celle qu'il s'agissait d'établir.

Lemme V. On a

$$((3 + 7) + (8 + 5)) = (10 + 13) .$$

En effet, après la substitution des symboles

$$(3 + 7), \quad (8 + 5), \quad 10 \quad \text{et} \quad 13$$

aux indéterminées

$$a, \quad b, \quad a', \quad b'$$

de la prémisse (3), l'hypothèse de celle-ci, devient, en vertu des lemmes I et II et des prémisses (8), (9), (11) et (12) une proposition vraie et la conclusion, une proposition qui coïncide avec celle que nous voulions établir.

Actuellement, il est aisé de démontrer la proposition (A) elle-même. En effet, en substituant dans la prémisse (1), aux

indéterminées

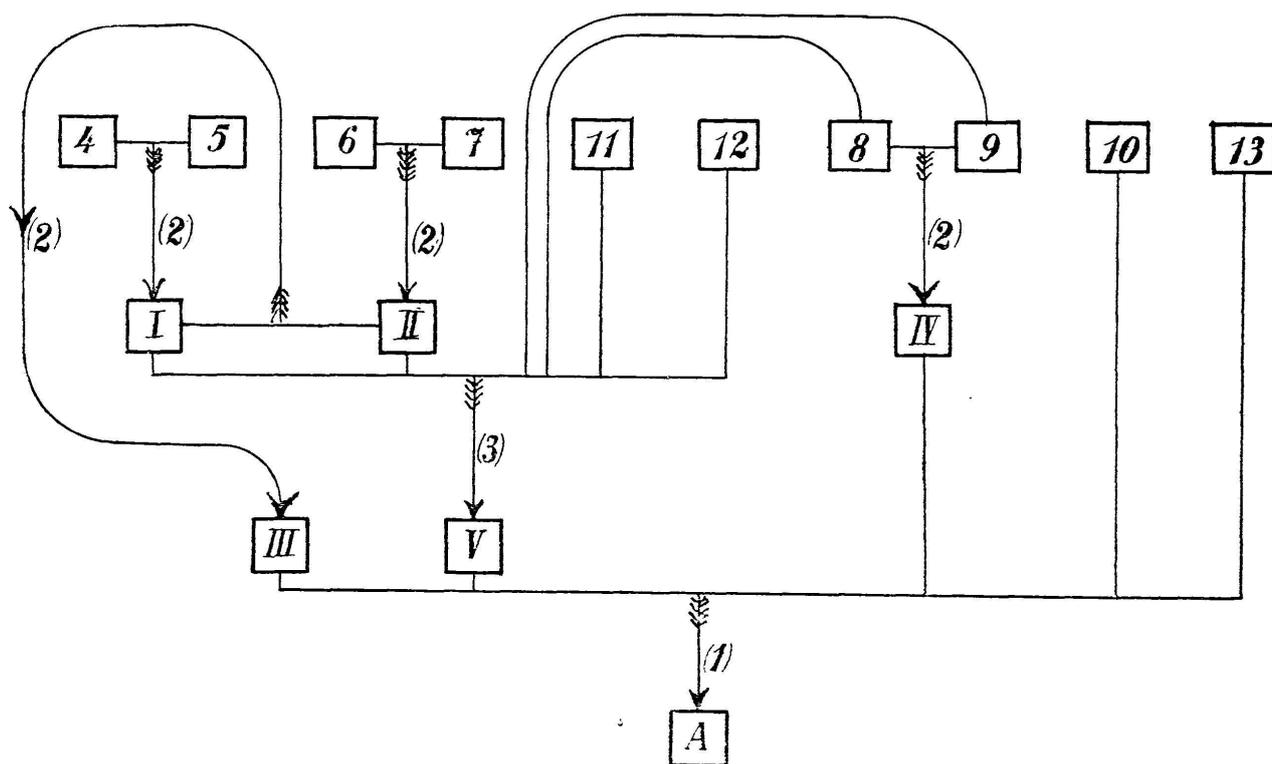
 a, b, c

les symboles

 $((3 + 7) + (8 + 5)), (10 + 13)$ et 23

on constate que, dans cette proposition, l'hypothèse devient, en vertu des lemmes III et IV, de la prémisse (10), du lemme V et de la prémisse (13) une proposition vraie, la conclusion venant coïncider alors avec la proposition (A) qu'il s'agissait justement de démontrer.

Le diagramme ci-joint permettra de se faire une idée d'ensemble de la démonstration précédente.



Dans ce diagramme, les chiffres arabes renvoient aux prémisses et les chiffres romains, aux lemmes; les flèches figurent le rôle des propositions conditionnelles indiquées par les chiffres arabes écrits à côté de celles-ci; enfin les traits qui n'affectent pas la forme de flèches servent à mettre en évidence les combinaisons dans lesquelles les prémisses et les lemmes entrent dans chaque chaînon logique.

IV. — PROCÉDÉ PARTICULIER APPLICABLE A LA DÉMONSTRATION DES PROPOSITIONS CONDITIONNELLES. MÉTHODE D'INDUCTION MATHÉMATIQUE. MÉTHODE DE LA RÉDUCTION A L'ABSURDE. POSTULATS HYPOTHÉTIQUES.

§ 14. — Contrairement à ce que l'on pourrait croire au premier abord, les propositions catégoriques ne sont pas les seules dont la démonstration puisse affecter l'une des formes considérées au chapitre précédent. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer que l'hypothèse et la conclusion d'une proposition conditionnelle peuvent être elles-mêmes des propositions conditionnelles.

Voici d'ailleurs un exemple simple où la démonstration d'une proposition conditionnelle est effectuée au moyen d'un chaînon logique, formé de la façon expliquée au § 11. Adop- tons, à titre de prémisses, les deux propositions suivantes :

(A₁) Lorsque les symboles l , m , n représentent trois entiers quelconques, on a :

$$l + m + n = l + (m + n) .$$

(C) Lorsque, pour un ensemble (E), la proposition suivante est vraie :

(P₁) Pourvu que l'on désigne par a , b et c trois éléments quelconques de l'ensemble (E), on a :

$$a + b + c = a + (b + c) ,$$

dans ce cas, pour l'ensemble considéré, sera vraie aussi la proposition que voici :

(P₂) Pourvu que l'on désigne par x , y , z , t quatre éléments quelconques de l'ensemble (E), on a :

$$x + y + z + t = x + (y + z + t) .$$

Ceci admis, il est aisé de démontrer le théorème suivant :

(A₀) Lorsque les symboles p , q , r , s représentent quatre entiers quelconques, on a :

$$p + q + r + s = p + (q + r + s) .$$

En effet, substituons aux indéterminées :

élément de l'ensemble (E), $a, b, c, x, y, z, t,$

de la proposition conditionnelle (C), les éléments suivants :

un entier, $l, m, n, p, q, r, s.$

Dans ce cas, l'hypothèse (P_1) et la conclusion (P_2) de la proposition conditionnelle (C) se transformeront en deux propositions exprimant respectivement les mêmes choses que les propositions (A_1) et (A_0). La première de ces propositions étant vraie (puisqu'elle est une prémisse), la seconde le sera nécessairement, comme il s'agissait de le démontrer.

§ 15. — Bien que, d'après ce qui précède, il puisse arriver que la démonstration d'une proposition conditionnelle assume l'une des formes considérées au chapitre précédent, ce cas ne se présente, dans la pratique, que d'une façon exceptionnelle.

Ordinairement on est obligé de recourir à l'artifice suivant : on adjoint momentanément l'hypothèse du théorème que l'on veut établir à l'ensemble des prémisses et l'on cherche à démontrer la proposition qui constitue la conclusion du théorème au moyen des procédés étudiés au chapitre précédent ; si l'on y parvient, on aura évidemment démontré par le fait le théorème lui-même qu'il s'agissait d'établir.

Pour donner un exemple simple de l'application de cette méthode, adoptons à titre de prémisse la proposition suivante :

(1) Lorsque les symboles a, b, c représentent trois entiers vérifiant les relations

$$a = b \quad \text{et} \quad b = c ,$$

on a

$$a = c .$$

Cela posé, proposons-nous de démontrer le théorème suivant :

(T). Lorsque les symboles p, q, r, s représentent des entiers vérifiant les relations

$$p = q , \quad q = r , \quad r = s ,$$

on a

$$p = s .$$

Conformément aux prescriptions de la méthode, adjoignons à la prémisse (1), à titre de prémisse provisoire, l'hypothèse du théorème (T); en d'autres termes, regardons provisoirement comme vraies les sept propositions suivantes :

(2) Le symbole p représente un entier.

(3) » » q » » »

(4) » » r » » »

(5) » » s » » »

(6) On a $p = q$.

(7) On a $q = r$.

(8) On a $r = s$.

Lemme I. On a $p = r$.

En effet, en substituant aux indéterminées

$$a, \quad b, \quad c$$

de la proposition (1), les symboles p, q, r , on transforme l'hypothèse de celle-ci en une proposition vraie comme équivalente, quant au sens, à l'ensemble des prémisses (2), (3), (4), (6) et (7). D'autre part, dans les mêmes conditions, la conclusion de la proposition (1) vient coïncider avec le lemme que nous voulions établir. Donc, ce lemme est démontré.

Cela posé, il suffit de substituer aux indéterminées

$$a, \quad b, \quad c$$

de la proposition (1) les symboles

$$p, \quad r, \quad s,$$

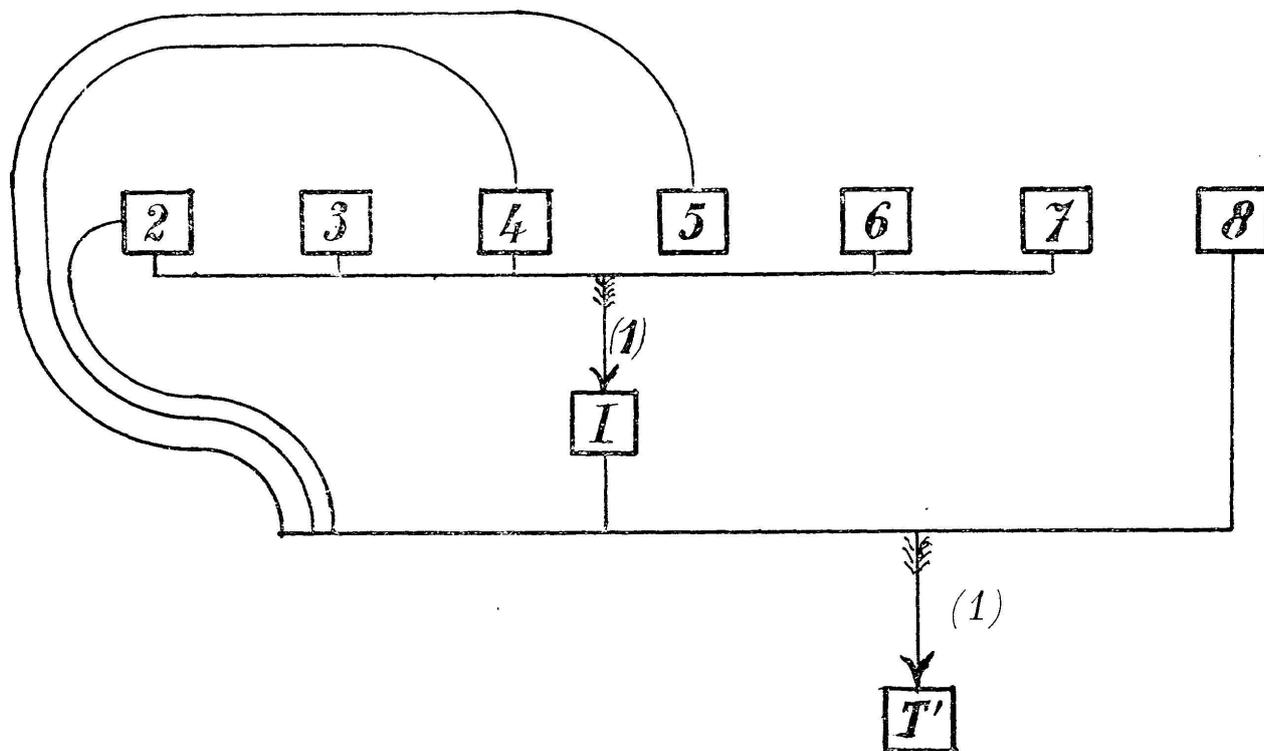
pour constater que l'ensemble des prémisses (2), (4), (5), avec le lemme I et la prémisse (8) d'une part, et la proposition (1) d'autre part, constituent la première et la seconde prémisses d'un chaînon logique qui a pour conclusion la relation

$$(T') \quad p = s.$$

Or, cette relation représente la conclusion du théorème (T); donc, d'après les principes généraux exposés plus haut, le théorème (T) lui-même doit être regardé comme démontré.

On peut, suivant le procédé employé déjà au § 13, représenter, au moyen du diagramme ci-joint, la déduction de l'égalité (T') des propositions

(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8).



§ 16. — Le procédé de démonstration connu sous le nom de *méthode d'induction mathématique* rentre, comme on le verra, dans la catégorie de ceux que nous avons déjà étudiés mais, à cause du postulat remarquable sur lequel il repose et de sa fécondité, il mérite d'être étudié à part, bien qu'il ne soit applicable qu'à une classe particulière de théorèmes. Cette classe de théorèmes est constituée par ceux dont l'énoncé peut être mis sous la forme générale suivante :

I. Lorsqu'un symbole n représente un nombre entier non inférieur à un nombre entier donné k , une certaine proposition (P), dont l'énoncé contient le symbole n , est vraie.

Tout théorème de cette forme est évidemment une proposition conditionnelle qui a la proposition (P) pour conclusion et, pour hypothèse, la suivante :

Le symbole n représente un nombre entier non inférieur à l'entier donné k .

Voici, à titre d'exemple, l'énoncé d'un théorème de la classe considérée :

Lorsque le symbole n représente un nombre entier non inférieur au nombre 2, la somme s_n de tous les entiers de 1 à n inclusivement vérifie l'égalité suivante :

$$2 \cdot s_n = n \cdot (n + 1) .$$

Dans les traités de mathématiques, on présente ordinairement la démonstration d'un théorème du type I de la façon suivante :

On démontre d'abord, au moyen des procédés étudiés précédemment, les deux propositions suivantes :

(1) La proposition (P_k) en laquelle se transforme la proposition (P) , à la suite de la substitution du nombre k au symbole n , est vraie.

(2) Si la proposition (P_q) en laquelle se transformerait la proposition P à la suite de la substitution au symbole n d'un entier q , non inférieur à k , était vraie, la proposition (P_{q+1}) , obtenue en substituant l'entier $q + 1$ à n dans la proposition (P) , serait vraie aussi.

Cela posé, on termine la démonstration par l'affirmation suivante :

(C) Donc, la proposition (P) est vraie pour toute valeur entière de n non inférieure à k comme il fallait le démontrer.

Quelquefois, on fait précéder la proposition (C) par les paroles suivantes : « la proposition (P) étant vraie pour

$$n = k ,$$

elle le sera, en vertu de (2), pour

$$n = k + 1 ;$$

étant vraie pour

$$n = k + 1 ,$$

la proposition (P) le sera encore, en vertu de (2), pour

$$n = k + 2$$

etc. »

Telles sont précisément les démonstrations que l'on dit

être effectuées par la méthode d'induction mathématique et que l'on appelle aussi *démonstrations par induction*.

Il est aisé de voir que, en réalité, dans une démonstration de la forme précédente, le théorème qu'il s'agissait d'établir se présente comme la conclusion d'un chaînon logique dont la première prémisse est formée par l'ensemble des propositions (1) et (2) et la seconde, par le postulat, évidemment vrai, que voici :

(A) *Lorsqu'un entier p fait partie d'un certain ensemble (E), lorsqu'en outre il suffit qu'un entier r , non inférieur à p , fasse partie de l'ensemble (E) pour que l'entier*

$$r + 1$$

fasse aussi partie de cet ensemble, dans ce cas, tout entier non inférieur à p fait partie de l'ensemble (E).

En effet, substituons aux indéterminées :

p ; un certain ensemble (E) ; r ,

de la proposition (A) les expressions suivantes :

k ;

ensemble des valeurs de n pour lesquelles la proposition (P) est vraie ;

q .

Après cette substitution, l'hypothèse de la proposition (A) se transformera en une proposition qui exprimera la même chose que l'ensemble des propositions (1) et (2) et la conclusion, en une proposition équivalente, quant au sens, au théorème (T) que l'on voulait démontrer.

En résumé, on voit que les démonstrations « par induction » ne sont pas, quant à leur structure, différentes de celles qui ont été étudiées précédemment ; ce qui caractérise ces démonstrations, c'est l'emploi du remarquable postulat (A).

D'ailleurs la « méthode d'induction mathématique » est tellement importante que Poincaré y voyait la principale source de la fécondité des sciences mathématiques¹.

Les exemples de l'application de cette méthode dans les

¹ POINCARÉ. *La Science et l'Hypothèse*.

traités de Mathématiques sont si fréquents qu'il nous a paru superflu d'en donner un dans ce travail.

En terminant ce paragraphe, il convient de faire remarquer que la méthode d'induction mathématique diffère essentiellement de la méthode inductive des sciences expérimentales. A la vérité il y a bien, dans les deux cas, un passage du particulier au général mais il repose, dans ces deux cas, sur des bases tout à fait différentes.

§ 17. — La méthode de démonstration, appelée *méthode de réduction à l'absurde*, est intimement liée à la méthode de démonstration des propositions conditionnelles exposée au § 15. Voici en quoi consiste la méthode de réduction à l'absurde : pour établir un théorème (T), on adjoint provisoirement à l'ensemble des propositions reconnues vraies précédemment (§ 10) la proposition (T') qui exprime la négation de l'exactitude de la proposition (T) et, en se servant des procédés de démonstration exposés plus haut, on démontre une proposition (P') qui exprime la négation de l'exactitude d'une proposition (P) que l'on sait être vraie ; ce résultat obtenu, on conclut que la proposition (T') est fautive et que, par conséquent, la proposition (T) qu'il s'agissait de démontrer est vraie.

Cette façon de procéder revient à établir d'abord, au moyen de l'artifice exposé au § 15, la proposition conditionnelle suivante : « si la proposition (T') était vraie, la proposition (P') le serait aussi¹ », et à démontrer ensuite, par une méthode que nous avons déjà étudiée au chapitre précédent, le théorème (T) en utilisant les postulats, évidemment vrais, que voici :

(1) Lorsqu'une proposition (P') constitue la négation d'une proposition vraie (P), elle est fautive.

(2) Lorsque, dans une proposition conditionnelle vraie, la conclusion (P') est fautive, l'hypothèse (T') de la proposition conditionnelle considérée est fautive aussi.

¹ La proposition placée dans le texte entre des guillemets est en réalité une proposition illusoire (§ 9) ; on voit donc ici comment des propositions de ce genre peuvent apparaître momentanément dans les théories mathématiques.

(3) Lorsque la négation (T') d'une proposition (T) est fausse, la proposition (T) est vraie.

En résumé, la démonstration d'un théorème par « la réduction à l'absurde » ne diffère pas, quant à sa structure, des formes de démonstrations considérées précédemment et son caractère propre tient en réalité seulement à la nature particulière de certains postulats qu'elle fait intervenir.

§ 18. — Il arrive souvent qu'une théorie mathématique, comme par exemple la géométrie non euclidienne, a pour but l'étude de ce qui arriverait dans le cas où certaines conditions (C) seraient vérifiées. Il est évident que les théorèmes d'une théorie de ce genre sont en réalité des propositions conditionnelles dont les hypothèses contiennent l'ensemble (E) des propositions exprimant que les conditions (C) sont vérifiées.

Pour appliquer à la démonstration de ces théorèmes la méthode du § 15 et pour éviter des longueurs inutiles, on regarde les propositions de l'ensemble (E) comme faisant partie des postulats de la théorie. Dans ce cas, les propositions de l'ensemble (E) constituent une catégorie de postulats qui ont cela de particulier que, en réalité, on ne se prononce nullement sur la question de savoir si ces postulats sont des propositions vraies. Il semble naturel de donner à ces postulats le nom de postulats *hypothétiques* en réservant aux autres postulats le nom d'*axiomes*. On peut, soit dit en passant, diviser les axiomes en *axiomes relatifs* et *axiomes absolus* en convenant de regarder un axiome comme faisant partie de la première ou de la seconde catégorie selon qu'il existe une théorie où l'axiome considéré est une proposition ayant le caractère d'un théorème, ou que cette circonstance ne se présente pas.

Il est évident que toute définition peut être considérée comme un postulat hypothétique; ainsi par exemple la définition ordinaire des droites parallèles peut être regardée comme exprimant l'hypothèse de l'identité du sens de l'assertion que deux droites sont parallèles et de l'assertion que les droites considérées sont situées dans un même plan sans avoir aucun point commun.

En rapprochant ces remarques de celles qui ont été faites au § 6, on arrive à la conclusion que les différentes subdivisions des prémisses d'une théorie, si importantes qu'elles soient quant à la façon de concevoir l'ensemble de la théorie, ont un caractère éminemment subjectif. Mais il importe de faire remarquer que cette circonstance n'affaiblit en rien la puissance des démonstrations comme moyen de provoquer la conviction et cela pour la raison suivante : ainsi que nous l'avons annoncé au § 4 et comme cela résulte des développements présentés au chapitre précédent et dans le chapitre actuel, la seule division des propositions formant une théorie mathématique qui soit importante au point de vue de la structure des démonstrations est la division de ces propositions en prémisses et en théorèmes. Or, pour toute théorie déjà constituée, cette division repose sur un caractère qui ne dépend pas du point de vue où l'on se place et elle est d'une parfaite netteté.

V. — EXAMEN CRITIQUE DES VUES PRÉCÉDENTES.

§ 19. — Il est tout d'abord naturel de se demander si toute démonstration mathématique rentre nécessairement dans les cadres sommairement tracés dans les deux chapitres précédents.

Nous croyons, sans pouvoir appuyer notre opinion d'une démonstration, qu'il en est bien ainsi pour toute démonstration *complète* (c'est-à-dire développée d'une façon tout à fait détaillée) à condition de tenir compte de ce fait que, en dehors des ramifications explicitement considérées au § 13, la démonstration d'un théorème peut en contenir d'autres provenant de la démonstration de propositions conditionnelles qui forment les secondes prémisses de certains chaînons logiques se présentant dans la démonstration du théorème considéré.

§ 20. — Actuellement nous allons examiner une objection grave qu'il est possible de soulever contre les démonstrations mathématiques et que l'on peut présenter de la manière

suivante : le but des démonstrations mathématiques est, semble-t-il, de borner le rôle de l'intuition à l'appréciation de la correction des postulats ; or, elles n'atteignent pas ce but. En effet, c'est par l'intuition que l'on est obligé de juger si, au sens du § 10, une proposition fait partie de celles qui, au point considéré de la théorie, forment l'ensemble des propositions reconnues vraies précédemment ; en outre, quand on forme un chaînon logique, c'est par l'intuition que l'on reconnaît les indéterminées qui peuvent figurer dans la proposition conditionnelle que l'on emploie et c'est encore par l'intuition que l'on apprécie le résultat d'une substitution effectuée sur les indéterminées. A la vérité, étant donné la démonstration d'un théorème, on peut la compléter en démontrant la justesse des jugements intuitifs qui s'y rencontrent sans figurer sur la liste des postulats, mais, alors, on introduira de nouveaux chaînons logiques avec leur cortège de nouveaux jugements intuitifs. En résumé, toute théorie mathématique, si détaillées que soient les démonstrations, contiendra des jugements intuitifs, *non prévus sur la liste des prémisses*.

Il est certainement impossible de nier la réalité de ce fait, toutefois nous verrons au § 25, après avoir pris connaissance d'une remarquable propriété des théories mathématiques, que, dans chacune d'elles, il existe un ensemble de choses que l'on peut indiquer avec sûreté et qui est tel que tout jugement intuitif relatif à l'une quelconque de ces choses est, s'il se présente dans la théorie, explicitement énoncé dans les postulats. D'ailleurs il importe de noter le fait capital suivant : en étudiant les théories mathématiques, on constate, *a posteriori*, que les démonstrations mathématiques complètes (§ 19) ne laissent subsister aucun doute dans l'esprit.

§ 21. — Dans la pratique, on ne développe presque jamais complètement les démonstrations dans les théories mathématiques à cause de leur grande longueur. Cette façon de procéder est légitime quand on donne des indications suffisantes pour que le lecteur puisse, sans trop de peine, combler lui-même toutes les lacunes.

Malheureusement, il arrive trop souvent que les abréviations sont poussées beaucoup plus loin et cela donne lieu, non seulement à de grandes difficultés pour le lecteur, mais encore à de graves erreurs, car le souci de la brièveté empêche l'auteur, plus souvent qu'on ne le croit, de s'apercevoir que lui-même ne saurait pas rétablir les chaînons manquant, et c'est ainsi que des propositions fausses sont quelquefois présentées comme des théorèmes démontrés.

VI. — COMPATIBILITÉ ET INDÉPENDANCE D'UN SYSTÈME DE POSTULATS. TERMES TECHNIQUES ET TERMES COURANTS. POSTULATS SPÉCIFIQUES D'UNE THÉORIE.

§ 22. — Il est évident que, pour la correction d'une théorie mathématique (et plus généralement, de n'importe quelle théorie déductive), il est nécessaire que les postulats de celle-ci soient *compatibles*; en d'autres termes, la condition suivante doit être remplie :

I. *Lorsqu'une proposition (P) est la négation d'un postulat de la théorie, elle ne doit pas être une conséquence des autres postulats de la théorie considérée.*

En dehors de cette condition, il en est une autre qui, sans être comme la précédente, une condition de validité de la théorie, en est certainement une condition de perfection : les postulats de la théorie doivent être *indépendants* ; en d'autres termes :

II. *Aucun postulat de la théorie ne doit être une conséquence des autres postulats de celle-ci.*

La question de savoir si un système donné de postulats vérifie l'une quelconque des deux conditions qui viennent d'être énoncées se ramène évidemment à la suivante :

III. *Une proposition donnée (P) est-elle une conséquence d'un système donné (S) d'autres propositions ?*

On pourrait être tenté de regarder cette question comme équivalente à la suivante :

IV. *Le système de propositions (S) constitue-t-il un ensemble suffisant de prémisses pour démontrer, d'après les principes exposés aux chapitres III et IV, la proposition (P) ?*

Cette interprétation de la question III offrirait le grand avantage de fournir (au moins théoriquement) un criterium général pour la résoudre ; en effet, il est aisé de voir qu'un nombre fini d'essais (pouvant, il est vrai, être très grand) conduirait nécessairement au but. Mais, en réalité, l'interprétation précédente de la question III ne satisferait pas aux besoins de la science (et elle ne coïncide pas avec celle que l'on adopte dans les travaux modernes). En effet, on peut d'abord se demander s'il n'existe pas quelque procédé de démonstration déductive essentiellement différent de ceux qui ont été considérés aux chapitres IV et V ; en outre, même si l'on admet avec nous qu'un tel procédé n'existe pas, on se heurte à une autre difficulté qu'un exemple particulier fera bien comprendre.

Envisageons les trois propositions suivantes :

(1) A toute suite finie de nombres entiers il correspond, en vertu d'une convention (C), un point parfaitement déterminé.

(2) Lorsqu'une suite finie (s) de nombres entiers est le résultat de la transposition de deux termes consécutifs dans une seconde suite finie (s') de nombres entiers, les points qui correspondent, en vertu de la convention (C), aux suites (s) et (s'), sont confondus.

(P) Lorsque les termes de deux suites finies (σ) et (σ') de nombres entiers sont constitués par les éléments d'un même ensemble de nombres entiers et ne diffèrent par conséquent que par l'ordre dans lequel sont rangés, dans chacune d'elles, les nombres appartenant à l'ensemble considéré, les points qui correspondent aux suites (σ) et (σ'), en vertu de la convention (C), sont confondus.

Cela posé, considérons la question suivante :

(Q) La proposition (P) est-elle une conséquence des propositions (1) et (2) ?

Tout mathématicien répondra à cette question par l'affirmation et, si l'on le prie de justifier sa réponse, il démontrera la proposition (P) en plaçant parmi les prémisses les propositions (1) et (2) mais l'ensemble des prémisses qu'il aura adoptées comprendra, en dehors des propositions (1) et (2), d'autres propositions encore.

Si l'on objectait à notre mathématicien que les propositions (1) et (2) ne constituent pas *tout* l'ensemble des prémisses sur lesquelles repose sa démonstration, il ne nierait pas ce fait, mais il ajouterait qu'il a rigoureusement établi que les propositions (1) et (2) ne peuvent être vraies sans que la proposition (P) ne le soit aussi et que, dès lors, il a justifié sa réponse d'une façon complète.

En résumé, la question III est loin d'être simple et claire par elle-même ; pour l'interpréter d'une façon satisfaisante, il est nécessaire d'étudier d'abord une propriété remarquable des théories mathématiques.

§ 23. — Pour mettre cette propriété en évidence, adressons-nous à un exemple particulier en reprenant celui qui, dans un tout autre but, a été déjà présenté au § 15. Dans cet exemple, nous avons adopté pour unique prémisses la proposition suivante :

(1) Lorsque les symboles a , b , c représentent des entiers vérifiant les relations

$$a = b \quad \text{et} \quad b = c ,$$

on a

$$a = c .$$

Cela posé, nous avons démontré le théorème suivant :

(T) Lorsque les symboles p , q , r , s représentent des entiers vérifiant les relations :

$$p = q , \quad q = r \quad \text{et} \quad r = s ,$$

on a

$$p = s .$$

Pour peu que l'on prenne la peine de repasser attentivement toute la petite théorie ainsi constituée, on constatera que, pour la complète validité de celle-ci, il n'est pas nécessaire que le symbole

=

(ou l'expression équivalente « est égal ») ait, dans son application aux nombres entiers, la signification habituelle ; en réalité, il est nécessaire et suffisant que ce symbole ait le sens voulu pour que la proposition (1) soit vraie. Ainsi par exemple,

si l'on attribuait au symbole considéré le sens que l'on donne habituellement au symbole

<

le théorème (T) et sa démonstration subsisteraient sans aucune modification. J'ajoute que l'expression

« un entier »

donne lieu à une remarque du même genre : on pourrait attribuer à cette expression le sens de

« un élément d'un certain ensemble (E) »

sans avoir à apporter la moindre modification à la théorie considérée.

En réalité, *toute théorie mathématique dont les théorèmes sont démontrés d'une façon complète contient, comme celle que nous venons de prendre pour exemple, un certain nombre de termes* (qui peuvent être des expressions empruntées au langage ordinaire ou n'importe quels autres symboles) *caractérisés par la circonstance suivante : pour la complète validité de la théorie, il n'est pas nécessaire d'attribuer à ces termes, que nous appellerons termes techniques de la théorie, en réservant la dénomination de termes courants aux autres termes, un certain sens parfaitement déterminé à l'exclusion de tout autre, il faut seulement et il suffit que les termes considérés soient interprétés de la façon voulue, pour que les prémisses soient des propositions vraies.*

Telle est la propriété fondamentale des théories mathématiques qui constituera le point de départ des considérations ultérieures.

Il est évident que tout terme, introduit dans une théorie au moyen d'une définition, est un terme technique de celle-ci, mais les termes techniques les plus fondamentaux sont ceux qui sont dépourvus de définitions ; nous les appellerons *termes techniques essentiels* de la théorie correspondante. Les termes techniques essentiels ne peuvent pas être éliminés de la théorie, comme ceux qui ont des définitions par le procédé indiqué au § 2 ; en outre, lorsque, dans les bornes

imposées par la condition de respecter l'exactitude des prémisses, on a choisi une signification particulière pour les termes techniques essentiels, les définitions ne laissent plus subsister rien d'arbitraire dans le sens que l'on peut attribuer aux termes techniques qu'elles définissent.

Dans l'exemple considéré au début de ce paragraphe, le symbole

$$=$$

et l'expression

un entier

sont évidemment des termes techniques essentiels.

Il est aisé de s'expliquer *a priori* la possibilité de l'existence, dans les théories mathématiques, de termes techniques, c'est-à-dire de termes dont le sens n'intervient pas dans les démonstrations, et de comprendre, en outre, pourquoi toute théorie mathématique doit nécessairement contenir, en dehors des termes techniques, des termes courants : en effet, il résulte des développements présentés dans les chapitres III et IV que la démonstration d'un théorème n'exige que l'effectuation, dans un certain ordre, d'opérations dont chacune est de l'un des genres suivants :

1° Reconnaître qu'une proposition exprime une partie de ce qu'exprime une autre proposition.

2° Reconnaître que le sens d'une proposition est identique à celui d'un certain ensemble d'autres propositions.

3° Constater qu'une proposition est la négation d'une certaine autre proposition.

4° Constater l'identité du sens de deux propositions.

5° Constater qu'une proposition est une proposition conditionnelle, distinguer l'hypothèse et la conclusion d'une telle proposition et reconnaître les indéterminées qu'elle peut contenir.

6° Apprécier le résultat d'une substitution effectuée sur les indéterminées d'une proposition conditionnelle.

Il est évident qu'aucune de ces opérations ne serait possible sans la connaissance du sens précis de certains termes, d'où l'existence nécessaire des termes courants.

D'autre part, il suffit de se reporter aux exemples qui ont

été donnés plus haut à diverses occasions pour reconnaître qu'il peut y avoir des termes dont on n'a pas besoin de connaître la signification précise pour être à même d'effectuer chacune des opérations susdites, d'où la possibilité de l'existence des termes techniques.

§ 24. — Les faits mis en évidence au paragraphe précédent nous induisent à adopter la convention suivante :

Lorsque tous les termes qui entrent dans une proposition (P) ainsi que dans les propositions formant un certain système (S) ont, exception faite de ceux qui appartiennent à un certain ensemble (\mathcal{T}), un sens bien déterminé et lorsqu'en outre il est impossible d'interpréter les termes (\mathcal{T}) de façon que les propositions (S) soient vraies sans qu'il en soit de même pour la proposition (P), nous dirons que, *par rapport aux termes (\mathcal{T}), pris pour termes techniques, la proposition (P) est une conséquence de l'ensemble des propositions (S).*

Cette convention admise, nous devons examiner par quels moyens on pourrait résoudre la question suivante :

V. — Une proposition donnée (P) est-elle, par rapport à un système donné de termes (\mathcal{T}), pris pour termes techniques, une conséquence d'un système donné de propositions (S) ?

S'il arrive qu'en adoptant pour postulats d'une théorie, admettant pour termes techniques les termes (\mathcal{T}), le système de propositions (S) ou celui que l'on obtient en adjoignant aux propositions (S) un nombre quelconque d'autres propositions, *sûrement vraies quelle que soit l'interprétation adoptée pour les termes (\mathcal{T})*, on réussisse à construire, conformément aux principes exposés aux chapitres III et IV, une démonstration de la proposition (P), on aura évidemment établi que la question V comporte une réponse affirmative. Si au contraire on avait trouvé une interprétation telle des termes (\mathcal{T}) que, avec cette interprétation de ces termes, les propositions (S) soient des propositions vraies, mais la proposition (P), une proposition fautive, on aurait constaté par cela même que la question V comporte, dans le cas considéré, une réponse négative.

Dans l'exemple considéré au début du paragraphe précédent, la proposition (T) est une conséquence de la proposi-

tion (1) par rapport au symbole

=

et à l'expression

un entier

pris pour termes techniques. Cet exemple est un exemple du cas où le système (S) (qui se réduit ici à la seule proposition (1)) constitue un système suffisant de prémisses pour démontrer la proposition (P).

Un exemple d'une autre nature est celui que nous avons envisagé au § 22. Le lecteur s'assurera que, dans ce cas, la proposition (P) est une conséquence des propositions (1) et (2) par rapport au terme

« la convention (C) » ,

pris pour terme technique ; mais il constatera que les propositions (1) et (2) *ne constituent pas* un système suffisant de prémisses pour établir la proposition (P) ; pour obtenir un tel système de prémisses, il faut adjoindre aux propositions (1) et (2) certaines propositions empruntées à la théorie des permutations, propositions qui restent vraies quel que soit le sens du terme

« la convention (C) » .

Pour donner un exemple du cas où la question V comporte une réponse négative, considérons les deux propositions suivantes :

(A) Lorsque trois nombres entiers, a , b , c , satisfont aux relations

$$a = b \quad \text{et} \quad b = c ,$$

on a

$$a = c .$$

(B) Lorsque deux nombres entiers x et y satisfont à la relation

$$x = y ,$$

on a

$$y = x .$$

Il est aisé de voir que, par rapport au symbole

$$=,$$

pris pour terme technique, la proposition (B) *n'est pas* une conséquence de la proposition (A).

En effet, regardons le symbole

$$=$$

comme ayant la signification attribuée ordinairement au symbole

$$<.$$

Dans ce cas la proposition (A) sera vraie, mais la proposition (B), fausse ; et cela suffit pour justifier ce que nous avons annoncé.

Nous laisserons au lecteur le soin de confirmer par des exemples (qu'il est particulièrement aisé de tirer de l'arithmétique) une prévision qui se présente d'elle-même à l'esprit et que l'on peut énoncer de la façon suivante :

Etant donné une proposition (P) et un système (S) d'autres propositions, il peut être possible de choisir arbitrairement entre certaines limites (que nous ne chercherons d'ailleurs pas à préciser) un certain ensemble (\mathfrak{C}) de termes parmi ceux qui servent à exprimer les propositions (P) et (S), pour examiner ensuite si la proposition (P) est une conséquence du système (S) par rapport aux termes (\mathfrak{C}), pris pour termes techniques ; dans ces conditions, le résultat de l'examen pourra dépendre du choix des termes (\mathfrak{C}).

§ 25. — Les notions acquises dans les deux paragraphes précédents permettent de préciser, plus complètement que nous ne l'avons pu faire jusqu'à présent, la portée des théories mathématiques et de tirer de là une indication importante relative à l'élaboration de ces théories.

Supposons que, dans une théorie (T), un certain ensemble de termes (\mathfrak{C}) soit un ensemble de termes techniques essentiels (§ 23) et admettons, en outre, que l'on ait constaté intuitivement ou de quelque autre façon le fait suivant : lorsque les termes (\mathfrak{C}) sont regardés comme les noms de certaines

choses (C), bien déterminées, tous les postulats de la théorie deviennent des propositions vraies. Dans ces conditions, la théorie (T) pourra être regardée comme une théorie des choses (C) et, au moins en ce qui concerne ces choses-là, elle ne contiendra certainement pas d'autres jugements intuitifs que ceux qui consistent à affirmer l'exactitude des postulats (II) dont les énoncés contiennent les noms des choses considérées. Nous dirons que l'ensemble des postulats (II) est l'ensemble des *postulats spécifiques* de la théorie considérée des choses (C). Il est clair que tout théorème de cette théorie des choses (C) sera, par rapport aux termes (T), pris pour termes techniques (§ 24), une conséquence des postulats spécifiques.

Voici l'indication fondamentale que l'on peut tirer de ce qui précède :

Lorsqu'on veut constituer une théorie mathématique d'un ensemble de choses, on doit chercher à la constituer de façon que les noms de ces choses aient le caractère de termes techniques.

Ce résultat étant atteint, les choses dont les noms se trouveront être des termes techniques essentiels, représenteront évidemment les éléments fondamentaux de la théorie et les postulats spécifiques feront connaître la part de l'intuition dans les jugements relatifs à ces éléments fondamentaux.

Si je ne me trompe, les notions présentées jusqu'ici dans ce chapitre n'ont jamais encore été mises en évidence d'une façon explicite, mais l'étude des travaux modernes relatifs aux fondements des branches essentielles des mathématiques amène à la conclusion que, sous une forme plus ou moins nette, ces notions existaient dans l'esprit des auteurs. C'est ainsi que, dans les recherches relatives aux fondements de la Géométrie, les termes tels que :

point; ligne droite; plan et quelques autres, jouent en réalité le rôle des termes techniques essentiels, et ce que l'on donne comme l'ensemble des postulats de la Géométrie ne peut être regardé que comme devant être, dans l'esprit des auteurs, l'ensemble des postulats spécifiques de la théorie qu'ils exposent; ce dernier point apparaît très nettement

quand on tient compte de ce fait que, dans les travaux dont il vient d'être question, on n'énonce aucune prémisse de l'Arithmétique et pourtant, dans les démonstrations, on fait un large usage de l'Arithmétique et même de l'Analyse mathématique.

§ 26. — Il résulte de ce qui a été exposé au paragraphe précédent que les conditions I et II, énoncées au § 22, doivent être regardées comme se rapportant au système des postulats spécifiques d'une théorie et que, dès lors, la liste des termes techniques essentiels de cette théorie doit constituer une donnée du problème qui consiste à vérifier si les conditions I et II du § 22 sont remplies. Cela étant, la question III du § 22 doit être regardée comme une forme abrégée de la question V du § 24 et, quand on aura à se la poser à l'effet de s'assurer si l'une des conditions I ou II du § 22 est vérifiée, l'ensemble des termes (C) devra coïncider avec l'ensemble des termes techniques essentiels de la théorie correspondante.

Les considérations précédentes nous amènent tout naturellement à formuler les règles suivantes :

Pour s'assurer si les postulats spécifiques d'une théorie mathématique satisfont à la condition I du § 22, en d'autres termes, pour reconnaître s'ils sont compatibles, on cherchera à trouver une interprétation telle des termes techniques essentiels que, avec cette interprétation de ces termes, chacun des postulats devienne une proposition vraie ; si l'on y réussit, la compatibilité des postulats considérés sera par cela même établie ; si au contraire on avait constaté que la négation de l'un des postulats est, par rapport aux termes techniques essentiels, une conséquence (§ 24) des autres postulats, on aurait fourni la preuve de l'incompatibilité des postulats considérés.

Quant à la condition II du § 22, celle de l'indépendance des postulats, on ne l'examinera que dans le cas où leur compatibilité aura été préalablement reconnue et l'on pourra alors procéder de la façon suivante : on envisagera successivement chaque postulat et chaque fois on cherchera à interpréter les termes techniques essentiels de façon que le pos-

tulat considéré momentanément devienne une proposition fausse et que, en même temps, tous les autres postulats deviennent des propositions vraies ; la réussite de toutes ces opérations constituera la preuve de l'indépendance des postulats considérés ; si au contraire on avait constaté que, par rapport aux termes techniques essentiels, l'un des postulats est une conséquence (§ 24) des autres postulats, on aurait démontré par cela même que les postulats considérés ne sont pas indépendants.

Dans la pratique, la question de savoir si les postulats spécifiques d'une théorie sont compatibles, ne donne pas lieu, ordinairement du moins, à des difficultés, et cela parce que, ordinairement, en constituant la théorie, on connaît d'avance une interprétation des termes techniques essentiels pour laquelle les postulats deviennent des propositions vraies. Au contraire, il est souvent si difficile de résoudre la question de l'indépendance des postulats que l'on est obligé d'y renoncer complètement, ou de se contenter d'une solution partielle qui consiste à prouver que certains des postulats sont indépendants des autres, c'est-à-dire tels qu'aucun d'eux n'est, par rapport aux termes techniques essentiels, une conséquence (§ 24) des autres postulats. J'ajoute que, dans certains cas, l'énoncé II donné au § 22 de la condition de l'indépendance des postulats peut être inadmissible parce que les énoncés de certains postulats peuvent impliquer l'exactitude de certains autres, énoncés antérieurement.

Lorsque cette circonstance se présente, on partage les postulats en un certain nombre de classes et l'on fixe un certain ordre de succession de ces classes de façon à pouvoir procéder (lorsque les difficultés ne sont pas trop grandes) de la façon suivante : on s'assure d'abord, en appliquant la méthode indiquée plus haut, que les postulats de la première classe sont indépendants et, en considérant ensuite, dans l'ordre adopté, les autres classes on opère comme il suit : on envisage successivement chaque postulat de la classe momentanément considérée et, chaque fois, on essaie d'interpréter les termes techniques essentiels de telle façon que le postulat considéré devienne faux et, qu'en même temps, tous

les autres postulats de la classe considérée et tous ceux des classes qui la précèdent deviennent des propositions vraies.

Si l'on réussit à effectuer toutes ces opérations, on dit que, *par rapport au classement adopté, les postulats considérés sont indépendants.*

Pour terminer, nous allons donner un exemple simple du cas où la compatibilité et l'indépendance d'un système de postulats peut être aisément établie. A cet effet, spécifions que le symbole

$$=$$

et l'expression

élément de l'ensemble (E)

seront les termes techniques essentiels de la théorie que nous allons considérer et adoptons pour postulats spécifiques de cette théorie les trois propositions suivantes :

(A). Lorsque le symbole a est un élément de l'ensemble (E) on a

$$a = a .$$

(B) Lorsque les symboles a et b représentent deux éléments de l'ensemble (E) tels que l'on ait

$$a = b ,$$

on a aussi

$$b = a .$$

(C) Lorsque les symboles a , b et c représentent trois éléments de l'ensemble (E), tels que l'on ait

$$a = b \quad \text{et} \quad b = c ,$$

on a aussi

$$a = c .$$

Pour reconnaître la compatibilité des trois postulats précédents, il suffit de remarquer qu'ils deviennent des propositions vraies dans le cas où l'expression

un élément de l'ensemble (E)

est considérée comme ayant le sens de

un nombre entier ,

le symbole

$$=$$

étant en même temps interprété comme on l'interprète ordinairement en arithmétique.

Pour établir l'indépendance de nos trois postulats, il faut, d'après la règle générale, établir les trois lemmes qui suivent :

Lemme I. Il est possible d'interpréter les termes techniques de façon que la proposition (A) soit fausse et chacune des propositions (B) et (C), une proposition vraie.

En effet, regardons l'expression

un élément de l'ensemble (E)

comme ayant le sens de

un nombre entier

et, en modifiant le sens habituel du symbole

$$=$$

dans une phrase symbolique de la forme

$$x = y ,$$

où x et y représentent des nombres entiers, convenons de regarder cette phrase symbolique comme exprimant à la fois les deux choses suivantes :

- 1° Aucun des symboles x et y ne représente l'unité ;
- 2° les symboles x et y sont ceux d'un même nombre entier.

Avec cette interprétation des termes techniques, chacune des propositions (B) et (C) sera vraie mais la proposition (A) sera fausse puisque, pour qu'elle fût vraie, il faudrait que l'on eût, pour *tout* nombre entier a ,

$$a = a$$

et il n'en est pas ainsi puisque, avec le sens attribué par nous au symbole

$$=$$

on n'a pas

$$1 = 1 .$$

Lemme II. On peut interpréter les termes techniques de façon que la proposition (B) soit fausse et, qu'en même temps, chacune des propositions (A) et (C) soit vraie.

En effet, il suffit, pour cela, de donner au terme

un élément de l'ensemble (E)

le sens que nous lui avons donné pour établir le Lemme I en convenant, en même temps, de donner au symbole

=

le sens habituellement attribué en arithmétique au symbole

\leq .

Lemme III. On peut interpréter les termes techniques de façon que la proposition (C) soit fausse et, qu'en même temps, chacune des propositions (A) et (B) soit vraie.

En effet, continuons à regarder l'expression

un élément de l'ensemble (E)

comme désignant un nombre entier, mais donnons une nouvelle interprétation au symbole

= ,

en convenant de regarder la proposition symbolique

$x = y$,

lorsque x et y représentent des nombres entiers, comme exprimant ce qui, dans la terminologie classique, pourrait être exprimé en disant que les nombres x et y sont ou égaux ou tels que le plus grand d'entre eux ne diffère que d'une unité de l'autre. Ces conventions adoptées, les propositions (A) et (B) seront évidemment vraies, mais la proposition (C) ne le sera pas car, bien que, en vertu de nos conventions, l'on ait en particulier

$1 = 2$ et $2 = 3$,

il résulte des mêmes conventions que l'on n'a pas

$1 = 3$.

Nos trois lemmes étant établis, l'indépendance des trois postulats l'est aussi.

En résumé, les postulats (A) (B) et (C) sont compatibles et indépendants.

Genève, décembre 1915.
