

Application des équations de Brahmagupta-Fermat à l'extraction approchée des racines carrées.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

les conditions, au nombre de deux, d'existence d'un orthocentre, sont :

$$a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2 .$$

Conformément à la théorie de l'arithmocercle, il suffira de se donner quatre nombres rationnels $a, \alpha, \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2}, \operatorname{tang} \frac{\mu}{2}$, et de poser :

$$\begin{aligned} b &= a \cos \lambda + \alpha \sin \lambda , & c &= a \cos \mu + \alpha \sin \mu , \\ \beta &= -a \sin \lambda + \alpha \cos \lambda , & \gamma &= -a \sin \mu + \alpha \cos \mu , \end{aligned}$$

les quatre nombres rationnels $a, \alpha, \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2}, \operatorname{tang} \frac{\mu}{2}$ étant uniquement assujettis aux conditions qui assurent l'existence effective du quadrilatère.

Application des équations de Brahmagupta-Fermat à l'extraction approchée des racines carrées.

32. — EXTRACTION APPROCHÉE PAR EXCÈS. Je partirai de l'équation considérée par Brahmagupta

$$nx^2 + 1 = y^2 ,$$

n étant le nombre rationnel, positif, non carré dont il s'agit de calculer la racine carrée; t étant un nombre rationnel arbitraire, la solution générale de cette équation est donnée par les formules de Brahmagupta rappelées au § 23 :

$$x = \frac{2t}{n - t^2} , \quad y = \frac{n + t^2}{n - t^2} .$$

Dans ces conditions, si t est un nombre rationnel suffisamment voisin de \sqrt{n} , x et y sont des nombres très grands; tout se passe alors comme si l'équation $nx^2 + 1 = y^2$ se réduisait à $nx^2 = y^2$; de sorte que $\frac{y}{x}$ est une valeur approchée de \sqrt{n} (par excès). Cette valeur approchée de \sqrt{n} est

$$v_1 = \frac{n + t^2}{2t} ;$$

l'erreur commise est :

$$\varepsilon_1 = v_1 - \sqrt{n} ;$$

on a donc

$$y = x(\varepsilon_1 + \sqrt{n})$$

et, par suite,

$$1 = x^2(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\sqrt{n}) ,$$

de sorte que l'expression

$$\frac{1}{2\sqrt{n}x^2} ,$$

où \sqrt{n} est remplacé par une valeur approchée par défaut, représente une limite supérieure de cette erreur ε_1 .

33. — EXTRACTION APPROCHÉE PAR DÉFAUT. L'équation

$$nx^2 - 1 = y^2$$

n'étant résoluble que lorsque n est une somme de deux carrés, on ne peut songer à l'utiliser pour déterminer une valeur approchée par défaut de \sqrt{n} . Pour obtenir celle-ci, il y aura lieu d'avoir recours à une équation résoluble quel que soit n ; par exemple, à l'équation

$$nx^2 - \frac{1}{n} = y^2$$

représentative d'une arithmohyperbole passant par l'arithmo-point $x = \frac{1}{n}$, $y = 0$. La méthode générale de résolution des équations de Braghmagupta-Fermat, à partir d'une solution particulière connue *a priori*, conduit actuellement aux formules suivantes de résolution :

$$x = \frac{n + t^2}{n(n - t^2)} , \quad y = \frac{2t}{n - t^2} .$$

Comme dans le paragraphe précédent, t sera une valeur rationnelle approchée de \sqrt{n} ; le rapport $\frac{y}{x} = v_2$, c'est-à-dire

$$v_2 = \frac{2nt}{n + t^2} ,$$

sera une valeur approchée (par défaut) de la racine carrée

de n . Pour expression de l'erreur ε_2 , on pourrait prendre :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2n^2 x^2}.$$

34. — En résumé, la théorie des équations de Brahma-gupta-Fermat conduit à un procédé d'extraction des racines carrées fondé sur les inégalités

$$\frac{2nt}{n+t^2} < \sqrt{n} < \frac{n+t^2}{2t}.$$

Les termes extrêmes ont pour produit n et leur différence est :

$$\frac{n+t^2}{2t} - \frac{2nt}{n+t^2} = \frac{(n-t^2)^2}{2t(n+t^2)}.$$

Cette méthode n'est d'ailleurs pas distincte de celle employée par les géomètres grecs, par ARCHIMÈDE notamment :

Soit, pour fixer les idées, à extraire la racine carrée de $n = 1000$. Ce nombre étant compris entre $\overline{31}^2 = 961$ et $\overline{32}^2 = 1024$, il y aura lieu de prendre $t = 32$, dans une première application des formules précédentes ; on obtient ainsi

$$\frac{8000}{253} = 31,620 < \sqrt{1000} < \frac{253}{8} = 31,625,$$

c'est-à-dire deux décimales exactes dès cette première application.

Une seconde application avec $t = \frac{253}{8}$ donne

$$\frac{4 \cdot 048 \cdot 000}{128 \cdot 009} < \sqrt{1000} < \frac{128 \cdot 009}{408},$$

ou encore :

$$31,622 \cdot 776 \cdot 3 < \sqrt{1000} < 31,622 \cdot 776 \cdot 6,$$

c'est-à-dire six décimales exactes.

Une troisième application donne quinze décimales :

$$31,622 \cdot 776 \cdot 601 \cdot 683 \cdot 793 \cdot 2 < \sqrt{1000} < 31,622 \cdot 776 \cdot 601 \cdot 683 \cdot 793 \cdot 4.$$