Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1915)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UN SYSTÈME DE CERCLES ET SUR UN PROBLÈME CONNEXE DE GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

Autor: Cailler, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16323

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

la projection du rayon de courbure de la chaînette sur une droite fixe est constante.

A chaque cas d'intégration on peut en faire correspondre un autre par voie d'inversion, mais on ne peut appliquer ceci qu'une fois, deux inversions se ramenant à une seule suivie d'une symétrie.

D'une façon plus générale, à chaque cas on peut en faire correspondre une infinité d'autres, dépendant d'une fonction arbitraire en donnant le lieu des centres d'une autre famille et en déterminant le rayon du cercle en chaque point de cette courbe par proportionnalité des rayons des cercles aux rayons de courbure en des points homologues.

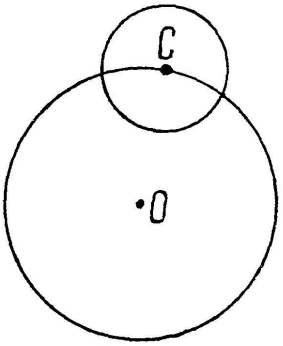

Fig. 6.

C'est ainsi, par exemple, que la famille composée de cercles de rayon constant dont le centre décrit un cercle nous donne la famille de cercles de rayon proportionnel au rayon de courbure du lieu des centres.

SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UN SYSTÈME DE CERCLES ET SUR UN PROBLÈME CONNEXE DE GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

PAR

C. Cailler, professeur à l'Université de Genève.

---

§ 1. — Dans un article publié en 1913 par les *Annales* de M. Teixeira[1], M. Turrière a résolu en coordonnées tangentielles le problème des trajectoires orthogonales des faisceaux de cercles à un paramètre variable. Il a consacré récemment à cette question un nouvel article paru dans l'*Enseignement mathématique*[2], en étendant aux trajectoires de ∞^1 courbes quelconques la méthode des coordonnées tangentielles.

[1] Voir tome VIII, *Annaes da Academia Polytechnica do Porto.*
[2] *Enseign. Math.*, tome XVI, 1914, p. 468.

En dépit de son caractère de grande simplicité, ce problème des trajectoires d'une famille de cercles est très intéressant, d'abord parce qu'il se rattache de près à la théorie de l'équation différentielle de Riccati, ensuite parce qu'il est lié à une foule d'autres problèmes de Géométrie élémentaire qui paraissent au premier abord en être aussi éloignés qu'étrangers les uns aux autres. Parmi ceux-ci je citerai les courbes de poursuite, les tractrices, les développantes, enfin les trajectoires d'une famille de droites rencontrant les droites de la famille sous un angle donné variable de l'une à l'autre.

Cette dernière question conduit, on le sait, à une équation différentielle de Lagrange, elle-même réductible aux équations linéaires, et par suite, intégrable. Il paraîtra singulier de la rapprocher du problème des trajectoires de cercles lequel dépend d'une équation de Riccati et n'est intégrable que dans certains cas particuliers.

Mais l'intégrabilité dérive ici des circonstances qui font que, en Géométrie euclidienne, les propriétés métriques des angles ne sont pas comparables de tout point aux propriétés métriques des longueurs, ces dernières étant généralement plus simples. Pour faire évanouir toute différence, et mettre en plein jour l'analogie profonde des diverses questions énumérées plus haut, il suffit de se placer dans le domaine de la Géométrie riemannienne, autrement dit il n'y a qu'à se transporter du plan à la sphère.

On sait avec quelle clarté apparaît sur la sphère le fait de la dualité : un même élément se présente en effet tantôt sous la figure d'un point, tantôt sous celle d'un arc de grand cercle qui correspond au point comme l'équateur au pôle. La substitution des coordonnées tangentielles aux ponctuelles n'est que le passage d'un des points de vue à l'autre. La symétrie parfaite que manifestent, dans l'ensemble de leurs propriétés, longueurs et angles, ne dispense naturellement pas de bien choisir l'inconnue d'un problème déterminé : c'est seulement l'aspect géométrique de cette inconnue, qu'elle soit une droite ou un point, qui est chose éminemment accessoire, quoique une des formes puisse s'offrir à l'esprit de manière plus immédiate.

En reprenant à mon tour le problème résolu par M. Turrière, je veux donner un nouvel exemple de ces sortes d'équivalences qui sont fréquentes en Mathématiques. Je transporterai la question du terrain de la Géométrie sphérique à celui de l'espace réglé de Lobatchewsky. Ce changement de point de vue est intéressant par sa généralité ; il me servira surtout à attirer, une fois encore, l'attention sur un résultat trop peu connu et qui mériterait de devenir classique non seulement pour les idées nouvelles et les facilités qu'il introduit dans l'étude des systèmes de droites euclidiens, surfaces, congruences et complexes, mais

aussi en raison de l'importance acquise récemment par la Géométrie non euclidienne dans la Physique de la relativité.

§ 2. — La propriété dont il s'agit ici se résume en deux mots en disant que la Géométrie réglée de Lobatchewsky est identique avec la Sphérique ordinaire, pourvu qu'on considère la sphère comme renfermant non pas simplement une double infinité de points réels mais une quadruple infinité de points imaginaires.

Sans énumérer en détail les raisons d'une semblable extension, bornons-nous à rappeler qu'une droite x de l'espace non-euclidien possède trois coordonnées complexes x_1, x_2, x_3 vérifiant l'équation $(xx) = 1$ [1]. Les quantités complexes x_i dépendent des coordonnées réelles de Plücker dont la formation est bien connue et n'a pas besoin d'être rappelée ; le changement simultané du signe des x_i redonne la même droite décrite en sens contraire.

Le second point qu'il faut relever est de nature géométrique ; il définit, pour la droite dans l'espace, une dualité d'un genre particulier. En voici le caractère. Au lieu de regarder une droite comme un élément d'espace, unique et indécomposable, il est loisible de la considérer comme formée du concours d'une infinité d'autres droites qui rencontrent la première sous un angle droit.

De même que l'axe d'un cylindre en détermine les rayons, de même la droite primitive et la congruence des normales dont elle est l'axe se déterminent réciproquement ; axe et congruence peuvent donc être confondus, ou plutôt réunis, dans une seule notion nouvelle qui est pour nous la *droite*.

Je rappelle encore la signification de l'invariant (xy) relatif à deux droites et celle de leur produit extérieur $[xy]$.

Nommons β la plus courte distance entre les deux droites, comptée positivement, et α l'angle de ces droites ; pour obtenir cet angle avec précision, il faut placer un observateur sur la perpendiculaire commune, les pieds en x, la tête au delà de y. L'angle polaire α est alors celui dont il faut faire tourner la droite x autour de l'observateur, dans le sens positif des axes coordonnés, pour que x soit caché par y.

Soit maintenant ω la quantité complexe $\omega = \alpha + \beta i$ qui définit complètement la situation relative du couple x, y dans l'espace ; soit encore z la perpendiculaire commune, tirée de x vers y. Nous avons alors

$$(xy) = \cos\omega\ , \qquad \text{et} \qquad [xy] = z \sin\omega\ ,$$

[1] Cette notation signifie $(xx) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. De même, si deux vecteurs x et y ont respectivement pour coordonnées x_1, x_2, x_3, et y_1, y_2, y_3, j'écris (xy) pour représenter le produit intérieur, $[xy]$ pour le produit extérieur. J'emploierai couramment les lettres x, y, z,... pour désigner des vecteurs, réservant les lettres a, b,... l, m,... pour les quantités scalaires.

formules identiques à celles de la Géométrie ordinaire, à cela près que l'angle ω est désormais complexe et remplace deux données géométriques.

La seule formule $(xy) = \cos\omega$ fournirait immédiatement l'interprétation géométrique des coordonnées $x_1 x_2 x_3$ d'une droite quelconque, relativement au système de référence OXYZ ; il suffirait d'appliquer la dite formule au cas où le vecteur y a ses coordonnées nulles, à l'exception d'une seule qui serait parallèle à l'un des axes. Inutile de développer les résultats, fort simples, et que nous n'aurons pas à employer ; en revanche il convient de remarquer, comme se déduisant immédiatement de ce qui précède, la règle que voici pour la détermination paramétrique de la congruence d'axe a.

Si deux droites a_1 et a_2 se rencontrent sous un angle droit et que, par suite $(a_1 a_2) = 0$, la droite a déterminée par la formule vectorielle

$$a = a_1 \cos\omega + a_2 \sin\omega$$

coupe à angle droit la perpendiculaire élevée sur les deux autres en leur point de rencontre. L'équation précédente représente ainsi un des éléments de cette perpendiculaire commune ; la distance β et l'angle α qui séparent cet élément de la droite a_1 appartenant au couple donné se tirent de la condition

$$\alpha + \beta i = \omega .$$

Je mentionnerai enfin une dernière conséquence, également fort simple, des quelques équations que nous venons d'écrire.

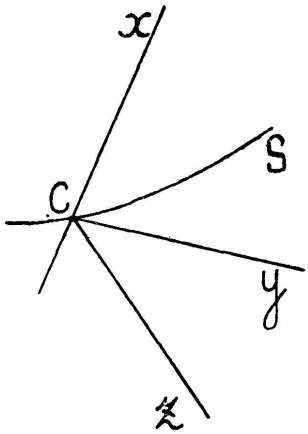

Fig. 1.

Soit une droite mobile $x(t)$, qui décrit une surface réglée, quand on fait varier le paramètre réel t dont elle dépend. Soient encore C le point central de la génératrice x, S le lieu des points centraux, c'est-à-dire la ligne de striction de la surface réglée.

On montre facilement que, dans ces conditions, la droite $z = \frac{1}{\rho}\frac{dx}{dt}$, où l'auxiliaire ρ doit vérifier la relation évidente $\rho^2 = \left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}\right)$, représente la perpendiculaire élevée par le point central à la surface réglée. Cette ligne que j'appellerai souvent la *normale centrale* est perpendiculaire à la fois à la génératrice et à la ligne de striction ; dans le cas particulier où x enveloppe la ligne de striction, en décrivant la développable dont cette courbe est l'arête, la *nor-*

male centrale se confond simplement avec la normale principale de cette arête.

En même temps que la *normale centrale* nous rencontrerons encore la *tangente centrale;* cette nouvelle droite y forme avec la génératrice et la normale centrale la troisième arête d'un trièdre trirectangle. Elle est donc placée dans le plan tangent, passe au point central, est dirigée à angle droit sur la génératrice, et a pour représentation analytique

$$y = \frac{1}{\rho}\left[x\,\frac{dx}{dt}\right].$$

§ 3. — Le problème que nous avons à résoudre est le suivant : *Soit une droite mobile* u(t) *qui engendre une surface réglée* S. *Avec une ligne* x, *perpendiculaire sur* u, *on demande de construire une nouvelle surface* T, *de telle manière que la normale centrale de cette surface* T *présente une disposition donnée avec la génératrice* u.

Il faut, autrement dit, que la distance et l'angle des deux droites en question, normale centrale et génératrice, soient égaux à deux fonctions $\beta(t)$ et $\alpha(t)$ données a priori.

Nous emploierons, dans toute la suite, les équations vectorielles, qui nous dispensent de mentionner les indices 1, 2, 3 dont les lettres x, u, $[xu]$... devraient être affectées pour représenter les coordonnées des diverses droites de même nom. Nous poserons en outre

$$\omega = \alpha + \beta i\ , \qquad \cos\omega = f(t)\ , \qquad \sin\omega = g(t)\ ,$$

ces deux fonctions f et g, qui sont les données, vérifient donc la relation $f^2 + g^2 = 1$; elles sont ordinairement complexes.

Des remarques qui terminent le paragraphe précédent, les équations du problème se déduisent à l'instant : ce sont

$$\left.\begin{aligned} (xu) &= 0\ , \\ \frac{1}{\rho}\,\frac{dx}{dt} &= g(t)\,[xu] + f(t)\,u\ . \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

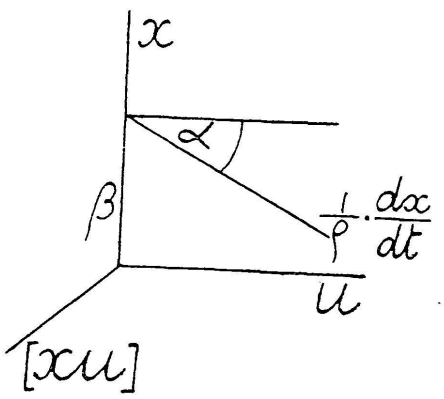

Fig. 2.

La première traduit la condition pour la rencontre à angle droit des génératrices correspondantes x et u ; pour trouver la seconde, il suffit d'interpréter par l'analyse le petit croquis ci-joint.

Remarquons que les quatre équations contenues dans le système (1) renferment aussi quatre inconnues, à savoir x_1, x_2, x_3 et l'auxi-

liaire ϱ. Si on multiplie la seconde relation par x et qu'on forme le produit intérieur $\left(x \frac{dx}{dt}\right)$, il vient

$$\frac{1}{\rho}\left(x \frac{dx}{dt}\right) = g(t)(xxu) + f(t)(xu) = 0 .$$

On a donc $\left(x \frac{dx}{dt}\right) = 0$, ou bien, en intégrant, $(xx) =$ const. Mais x représente une droite, la constante doit être égale à l'unité. En résumé, la question se ramène à déterminer celles des solutions du système (1) qui donnent $(xx) = 1$, ou $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Réunissons le facteur $f(t)$ avec l'indéterminée ϱ, et remplaçons le quotient $\frac{g(t)}{f(t)} = tg\omega$ par la notation abrégée $h(t)$. Nous aurons, après ces simplifications, à résoudre un système de la forme

$$(xx) = 1 , \qquad (xu) = 0 , \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dx}{dt} = h[xu] + u . \tag{2}$$

Différentions deux fois la seconde de ces formules en remplaçant toujours $\frac{dx}{dt}$ par sa valeur tirée de la troisième, il vient

$$(xu) = 0 , \qquad (xu') = -\rho , \qquad (xu'') + (x'u') = -\frac{d\rho}{dt} . \tag{3}$$

Mais, en portant dans $(x'u')$ la valeur $x' = \frac{dx}{dt}$ tirée de la troisième formule (2), l'expression subit une série de transformations

$$\frac{1}{\rho}(x'u') = h(xuu') + (uu') = h(xuu') = h(x[uu']) .$$

Voici donc, en résumé, le système à résoudre

$$\left.\begin{aligned} & x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0 , \\ & x_1 u_1' + x_2 u_2' + x_3 u_3' = -\rho , \\ & x_1 \{ u_1'' + \rho h [uu']_1 \} + \ldots = -\frac{d\rho}{dt} \end{aligned}\right\} . \tag{4}$$

Pour le résoudre commodément nous supposerons que la variable t, dont le choix est arbitraire, a été déterminée de manière à satisfaire la condition $(u'u') = u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 = 1$. Il est vrai que nous laissons ainsi de côté le cas exceptionnel pour lequel $(u'u') = 0$, et que, en outre, la variable t cesse d'être réelle pour devenir complexe. Le premier inconvénient pourrait être facile-

ment évité au prix de quelques longueurs ; il n'y a pas à s'arrêter au second, car il ne faut pas perdre de vue que le lieu de cette variable n'est jamais le plan complexe dans son entier, mais seulement une ligne de ce plan. Admettons donc que $(u'u') = 1$, et n'oublions pas qu'on a aussi $(uu) = 1$.

On tire de là par la différentiation

$$(uu') = 0 \ , \qquad (u'u'') = 0 \ , \qquad (uu'') = -1 \ ;$$

or le vecteur $U = [u''u]$ vérifiant aussi les équations

$$(uU) = 0 \ , \qquad (u''U) = 0 \ ,$$

il en résulte que, sauf un facteur, il doit coïncider avec u', ainsi

$$[u''u] = \gamma u' \ ;$$

ce facteur de proportionnalité γ est égal au déterminant

$$\gamma = (u'[u''u]) = (uu'u'') \ ;$$

d'autre part, en élevant au carré le déterminant $(uu'u'')$ par la règle ordinaire, et profitant des relations entre u, u', u'', nous avons

$$\gamma^2 = \begin{vmatrix} (uu) & (u'u) & (uu'') \\ (uu') & (u'u') & (u'u'') \\ (uu'') & (u'u'') & (u''u'') \end{vmatrix} = (u''u'') - 1 \ .$$

C'est cette constante γ, laquelle est ordinairement complexe, qu'on peut nommer *courbure complexe* de la surface réglée S, à cause de son identité avec la courbure d'une courbe plane de coordonnées réelles u_1, u_2, u_3 ; nous en avons établi ci-dessus plusieurs expressions équivalentes.

Revenons au système (4) ; il est clair que son déterminant vaut

$$(uu'u'') + h\rho([uu'][uu']) \ , \text{ soit, } \gamma + h\rho \ .$$

D'autre part, les mineurs relatifs aux éléments u'' et u' valent respectivement $[uu']$, et

$$[u''u] + h\rho u' = (\gamma + h\rho)u' \ .$$

Voici donc la solution cherchée

$$x = -u'\rho - \frac{[uu']}{\gamma + h\rho}\frac{d\rho}{dt} \ ; \tag{5}$$

portons cette valeur dans la condition $(xx) = 1$, il vient pour l'équation différentielle que doit vérifier l'inconnue ρ

$$1 = \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \frac{1}{(\gamma + h\rho)^2},$$

ou encore

$$\frac{d\rho}{dt} = (\gamma + h\rho)\sqrt{1 - \rho^2} \quad . \tag{6}$$

Et pour faire apparaître l'équation de Riccati d'où dépend la solution, il suffit de poser ici

$$\rho = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \quad .$$

§ 4. — *Interprétation du problème dans le plan de Lobatchewsky.* Il s'agit maintenant de bien mettre en évidence les points de contact que présente le problème résolu plus haut pour l'espace réglé avec celui des trajectoires orthogonales des systèmes de cycles. Les cycles du plan de Lobatchewsky offrent une grande variété de formes quand on veut les considérer sous le double aspect ponctuel et tangentiel et, par suite, le problème des trajectoires donne lieu à des variantes multiples. Mais pour les énumérer toutes, il suffira de passer de l'espace réglé au plan en imaginant, pour les positions des droites variables x et u, seulement deux possibilités : tantôt ces droites appartiennent au plan de la figure, tantôt elles lui sont perpendiculaires. Dans ce dernier cas, la droite est figurée dans le plan par sa trace qui est un point.

On remarquera que, quelle que soit celle des situations qu'occupe la droite mobile relativement au plan, qu'elle y soit contenue ou lui soit perpendiculaire, la normale centrale fait toujours avec le plan un angle droit ou nul. Quand la normale appartient au plan, elle est centrale soit à l'enveloppe de la droite mobile x, soit à la base perpendiculaire du cylindre engendré par cette droite. Le seul cas où elle soit perpendiculaire au plan est celui où la génératrice x, située dans le plan, admet une ligne de striction réelle : la normale centrale, figurée par sa trace, coïncide alors justement avec le point central.

De toute manière, il faut, pour la possibilité du problème, que l'invariant $\cos(\alpha + \beta i)$ qui détermine la position de cette normale centrale par rapport à la génératrice u de la surface S soit réel ou purement imaginaire. Dans le premier cas, β est nul et α quelconque; dans le second, $\alpha = 90°$ et β est quelconque.

Il est évident que l'imaginaire, quand il apparaît, s'élimine à la fin du calcul ; mais au lieu d'entrer dans le détail de ces compensations nécessaires entre quantités réelles et imaginaires, je me bornerai à transcrire les formes différentes que revêt le problème suivant la signification des symboles x et u.

1° Soit $u(t)$ un point, x une droite (fig. 3). La condition $(xu) = 0$ montre que la droite doit contenir le point. Si la droite possède une enveloppe réelle E, $\frac{1}{\rho}\frac{dx}{dt}$ en est la normale élevée par le point de contact.

D'après l'énoncé du problème il faut que la normale, ou, ce qui revient au même, le point même de contact y, se trouve à une distance donnée r du centre u.

La courbe E coïncide donc avec la trajectoire du cercle mobile dont le centre est $u(t)$ et le rayon $r(t)$. On remarquera que c'est en prenant pour inconnues les coordonnées tangentielles x que l'on est conduit au système (1), puis à l'équation de Riccati (6).

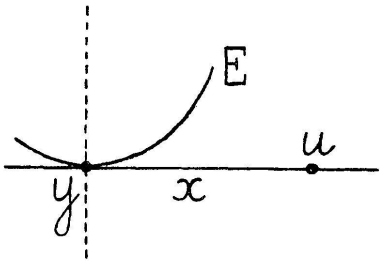

Fig. 3.

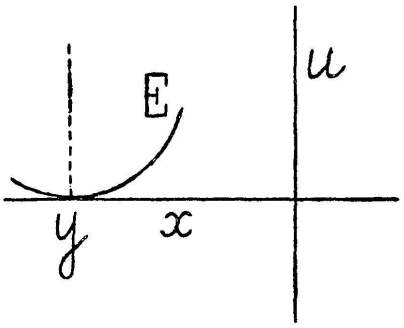

Fig. 4.

2° Soit $u(t)$ une droite, x une autre droite (fig. 4); la condition $(xu) = 0$ exige qu'elles soient rectangulaires. Si, comme dans le cas précédent, la ligne x enveloppe une courbe, les conditions du problème expriment que le point de contact est à une distance donnée $r(t)$ de la droite $u(t)$. On a donc affaire ici aux trajectoires orthogonales d'un système de ∞^1 équidistantes[1] ayant les diverses droites $u(t)$ comme bases et $r(t)$ pour rayons. Ici encore x représente la vraie variable de la question.

3° Ce cas est identique au premier, sauf que la droite x, au lieu

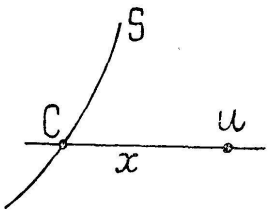

Fig. 5.

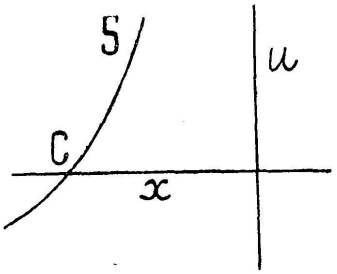

Fig. 6.

d'envelopper une courbe réelle, possède une ligne de striction. Si telles sont les conditions, la quantité $\frac{1}{\rho}\left(\frac{dx}{dt}\right)$ désigne le point central; d'après la nature du problème, il faut que ce point central

[1] Je préfère cette locution plus significative que celle d'*hypercycle* en usage.

soit à une distance donnée du centre u. La question se ramène ainsi à *placer sur chaque droite* u *un point* C, *de telle manière que le rayon mobile* Cu *ait justement son point central en* C (fig. 5).

4° Même problème que le précédent en remplaçant simplement le système de ∞^1 cercles par un système analogue de ∞^1 équidistantes (fig. 6).

5° Le cinquième cas peut s'appeler le *problème de Lagrange;* il correspond à la supposition que x est un point, et non une droite, comme dans les problèmes précédents. Au lieu des coordonnées tangentielles employées jusqu'à présent vont intervenir les coordonnées ponctuelles du lieu cherché (fig. 7).

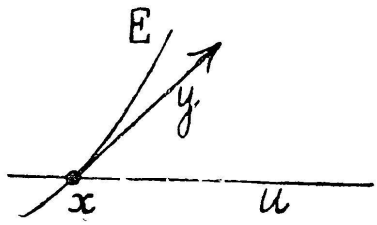

Fig. 7.

Entre l'élément x et l'élément u, nous avons toujours la relation d'orthogonalité $(xu) = 0$; or x étant un point, cette condition ne peut être vérifiée que si u est une droite et celle-ci doit contenir le point. De plus $\frac{1}{\rho}\frac{dx}{dt}$ représente la normale élevée à la trajectoire du point x; la condition d'invariance, qui est celle du problème, indique que *cette trajectoire* E *rencontre les droites du faisceau donné* u *sous un angle connu, variable d'une droite à l'autre.*

Nous savons que, dans ce cas, la vraie variable du problème se rattache au point de vue ponctuel; le choix des coordonnées ponctuelles s'impose; il mène tout droit à l'équation différentielle de Riccati (6).

§ 5. — Une question se pose encore. Sous quelle forme se présente la solution, par exemple dans le cas des trajectoires des cercles, si on prend pour variables les coordonnées du point de contact? Ce point de contact a pour image, dans l'espace réglé, la droite que j'ai nommée plus haut la *tangente centrale* et que je désignerai par la lettre y.

La tangente centrale est, nous le savons, la perpendiculaire élevée à la génératrice, par le point central et dans le plan tangent; elle a pour coordonnées l'expression $y = \frac{1}{\rho}\left[x\frac{dx}{dt}\right]$. Il est clair que si la normale centrale $\frac{1}{\rho}\frac{dx}{dt}$ possède, par rapport à la droite donnée u, un invariant de position égal à $f(t) = \cos(\alpha + i\beta)$, la tangente centrale y aura de son côté, relativement à la même droite, un invariant égal à $g(t) = \sin(\alpha + i\beta)$. Ainsi donc, sa représentation paramétrique en u et $[xu]$, analogue à la seconde formule (1), sera donnée par l'équation

$$y = -f(t)[xu] + g(t)u \; ; \qquad (7)$$

nous avons à établir l'équation différentielle que vérifie cette quantité y. L'élimination de la variable x entre la formule (7) ci-dessus et le système (1) est pénible si on l'entreprend directement; nous arriverons plus rapidement au but en procédant comme suit.

On a évidemment $(xy) = 0$, et $\left(y \frac{dx}{dt}\right) = 0$. Or, si on différentie la première de ces formules, il vient par comparaison $\left(x \frac{dy}{dt}\right) = 0$. Ayant ainsi

$$\left(x \frac{dy}{dt}\right) = 0 , \qquad \left(y \frac{dy}{dt}\right) = 0$$

et

$$\left(x \frac{dx}{dt}\right) = 0 , \qquad \left(y \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

on voit, ce que d'ailleurs la géométrie montre immédiatement, que $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ diffèrent l'un de l'autre seulement par un facteur scalaire.

D'autre part, nous avons

$$\frac{1}{\varrho} \frac{dx}{dt} = f(t)\, u + g(t)\, [xu] = \frac{g}{f}\left(\frac{u}{g} - y\right) = h\left(\frac{u}{g} - y\right) ;$$

donc enfin les équations différentielles cherchées ont la forme

$$\frac{dy}{dt} = \sigma\left(y - \frac{u}{g}\right) , \tag{8}$$

il y faut joindre les formules complémentaires

$$(yy) = 1 , \qquad \text{et} \qquad (yu) = g . \tag{9}$$

L'interprétation de ces formules (8) et (9) dans l'espace euclidien est immédiate; elle montre directement que le problème posé est celui des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles appartenant à la sphère-unité.

La seule question intéressante pour nous concerne la relation qui existe entre la nouvelle inconnue σ et l'ancienne inconnue ϱ; c'est, nous le savons, l'emploi de cette dernière qui réduit le problème à une certaine équation de Riccati.

Pour obtenir la correspondance, différentions la formule (9) soit $(yu) = g$; nous avons

$$(yu') + (y'u) = g' ,$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (8) pour y' ou $\frac{dy}{dt}$

$$(yu') = g' + \sigma \frac{f^2}{g} ; \tag{10}$$

et le problème se réduit essentiellement à exprimer le premier membre (yu') en fonction de la variable ϱ.

Or, puisque $(xy) = 0$ et $\left(y \frac{dx}{dt}\right) = 0$, $y = \lambda \left[x \frac{dx}{dt}\right]$; mais, en élevant au carré, (yy) doit se réduire à l'unité. On conclut de là

$$\lambda^2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt}\right) = 1 \ ;$$

puis en vertu de la troisième formule (2),

$$\lambda \varrho \sqrt{1 + h^2} = 1 \ , \qquad \text{ou} \qquad \lambda \varrho = f \ ,$$

ou encore

$$y = \frac{f}{\rho} \left[x \frac{dx}{dt}\right] .$$

D'après cela, la quantité cherchée se présente sous la forme

$$(yu') = \frac{f}{\rho} \left(\left[x \frac{dx}{dt}\right] u'\right) = \frac{f}{\rho} (xx'u') \ . \tag{11}$$

Il reste à exprimer le déterminant $(xx'u')$ en fonction de ϱ. Admettons de nouveau, pour simplifier, que la variable t vérifie la condition $(u'u') = 1$, et élevons au carré le dit déterminant.

En tenant compte des conditions

$$(xx) = 1 \ , \qquad (xx') = 0 \ , \qquad (xu') = -\rho \ ,$$

dont la dernière est empruntée au tableau (4), il vient

$$(xx'u')^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\rho \\ 0 & m & \delta \\ -\rho & \delta & 1 \end{vmatrix} = m\,(1 - \rho^2) - \delta^2 \ .$$

Les abréviations m et δ désignent ici les combinaisons

$$m = (x'x') \ , \qquad \text{et} \qquad \delta = (x'u') \ ;$$

c'est elles qu'il faut encore exprimer en ϱ.

La transformation est rapide ; car le système (2) donne immédiatement

$$(x'x') = \rho^2 (1 + h^2) = \frac{\rho^2}{f^2} \ ;$$

d'autre part, d'après l'équation (3),

$$\delta = (x'u') = -\frac{d\rho}{dt} - (xu'')$$

tandis que (5) nous donne $(xu'') = -\dfrac{\gamma}{\gamma + h\rho} \dfrac{d\rho}{dt}$.

En résumé nous avons

$$m = \frac{\rho^2}{f^2}, \quad \delta = -\frac{d\rho}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma + h\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{-h\rho}{\gamma + h\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

ou encore d'après l'équation de Riccati (6),

$$m = \frac{\rho^2}{f^2}, \quad \delta = -\rho h\sqrt{1-\rho^2}.$$

Enfin

$$(xx'u')^2 = (1-\rho^2)\left(\frac{\rho^2}{f^2} - \rho^2\frac{g^2}{f^2}\right) = \rho^2(1-\rho^2)$$

et, en portant cette valeur dans (11)

$$(yu') = f\sqrt{1-\rho^2}$$

Ce résultat nous donne la relation (10) cherchée entre σ et ρ sous la forme

$$\sigma = h\sqrt{1-\rho^2} - \frac{gg'}{f^2}. \tag{12}$$

Portons en dernier lieu cette valeur dans l'équation différentielle (6) ; nous obtenons la transformée telle qu'on l'eût obtenue en employant, pour résoudre le problème, les coordonnées ponctuelles y de la formule (8). Elle affecte la forme

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mathrm{P}(\sigma) + \sqrt{\mathrm{Q}(\sigma)}$$

où P et Q désignent deux polynômes du second degré.

Si on avait formé directement cette équation à l'aide du système (8), rien n'aurait indiqué la propriété caractéristique qu'elle possède de se réduire à l'équation de Riccati par la substitution

$$\mathrm{Q}(\sigma) = \frac{2z}{1+z^2};$$

des calculs pénibles seraient même nécessaires pour faire apparaître ce caractère qui n'appartient pas, cela va sans dire, à toutes les équations du type précédent.

En résumé, dans le cas de l'espace réglé, notre problème se présente d'une manière plus simple quand on choisit pour variable la génératrice x, plutôt que la tangente centrale y, de la surface à déterminer. C'est pour les mêmes raisons qu'il faut préférer le point de vue tangentiel au ponctuel dans les quatre premiers cas du problème des trajectoires, et le ponctuel au tangentiel dans le cinquième.

§ 6. — *Les trajectoires orthogonales d'une famille d'horicycles.* Parmi les familles des différents cycles dont on peut être appelé à chercher les trajectoires orthogonales, un cas a été omis, celui d'une famille composée d'horicycles. Ce cas doit être traité à part; il présente en effet des particularités qui méritent de retenir l'attention, et qui font de ce problème des horicycles beaucoup plutôt un cas singulier qu'un cas limite du problème général des cycles.

Pour s'orienter il convient tout d'abord de reprendre, par une nouvelle marche, le cas général, en retenant seulement de la discussion précédente l'idée que la variable naturelle de la question est la tangente à la courbe cherchée, non le point décrivant.

Soient y_1, y_2, y_3 les coordonnées, réelles ou purement imaginaires, d'un point du plan de Lobatchewsky, u_1, u_2, u_3 celles du centre d'un cycle variable; l'équation de la famille est donc

$$(uy) = r \ , \qquad \text{ou} \qquad u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 = r \ .$$

Le paramètre r dépend de la même variable t que le centre u de notre cycle; le cycle lui-même est un cercle ou une équidistante quand on a $(uu) = 1$, il devient un horicycle quand $(uu) = 0$.

Dans les trois cas, les coordonnées de la normale x menée au cycle satisfont la condition

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = (ux) = 0 \ .$$

Prenons deux cycles infiniment voisins appartenant à la famille, menons-leur deux normales infiniment rapprochées; le point de croisement de ces normales est donné par la formule

$$y = \frac{1}{\rho}\left[x\,\frac{dx}{dt}\right],$$

et l'on a

$$\rho^2 = \left(\frac{dx}{dt}\,\frac{dx}{dt}\right), \qquad \text{et} \qquad (yy) = 1 \ .$$

Mais comme le point de rencontre doit appartenir au cycle $(uy) = r$, il faut encore que $\frac{1}{\rho}\left(ux\,\frac{dx}{dt}\right) = r$.

Voici, en résumé, le système à résoudre

$$\left.\begin{array}{ll} (xx) = 1 \ , & (xu) = 0 \ , \\ \dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{dx}{dt}\,\dfrac{dx}{dt}\right) = 1 \ , & \left(ux\,\dfrac{dx}{dt}\right) = r\rho \ . \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Ce système doit se ramener au système (1), comme il est d'ailleurs aisé de le faire voir.

Supposons en effet que les trois vecteurs x, u, $[xu]$ soient liné-

airement indépendants; en désignant par l, m, n trois quantités scalaires inconnues, on peut toujours écrire, dans cette supposition,

$$\frac{1}{\rho}\frac{dx}{dt} = lx + mu + n[xu] \ . \tag{14}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les facteurs l, m, n de manière que le système (13) soit vérifié.

Mais en portant la valeur précédente dans le déterminant $\left(ux\frac{dx}{dt}\right)$, on trouve $n = r$. En la substituant dans l'équation

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(xx) = \left(x\frac{dx}{dt}\right) = 0 \ ,$$

il vient $l = 0$; enfin pour satisfaire $\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}\right) = 1$, il faut que

$$m^2 + n^2 = 1 \ , \text{ c'est-à-dire } m = \sqrt{1 - r^2} \ .$$

En résumé les équations restantes, à savoir $(xu) = 0$, et (14), reproduisent purement et simplement le système (1), la méthode actuelle n'est qu'une variante de l'ancienne.

On peut se demander si l'équation (1), ou

$$\frac{1}{\rho}\frac{dx}{dt} = g[xu] + fu \ ,$$

continue d'être valable dans le cas de l'horicycle; il est facile de voir qu'il n'en est rien, car l'équation ci-dessus, dans le cas dont il s'agit, est incompatible avec la condition $\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}\right) = 1$.

En effet, comme on a maintenant $(uu) = 0$, on en tire

$$([xu][xu]) = (xx)(uu) - (xu)^2 = 0$$

et par suite, quels que soient f et g,

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

ce qui est impossible. La raison pour laquelle la méthode générale tombe ici en défaut réside dans le fait que les trois vecteurs x, u, $[xu]$ ne sont plus linéairement indépendants, le déterminant $\left(xu\frac{dx}{dt}\right)$, ou $([xu][xu])$, s'étant réduit à zéro, comme on vient de voir. De toute manière la méthode applicable à l'horicycle doit s'écarter sensiblement de celle qui suffisait pour les autres espèces de cycles.

Pour trouver les modifications nécessaires remarquons que les quantités

$$(u[uu']) \qquad \text{et} \qquad (u'[uu'])$$

sont nulles l'une et l'autre, et que, à cause de la supposition actuelle, $(uu) = 0$; ainsi nous avons

$$(uu) = 0 \qquad \text{et} \qquad (u'u) = 0 \ .$$

De là résulte immédiatement que le produit extérieur $[uu']$ est proportionnel à u, ou que, autrement dit, $[uu'] = su$; et il est facile de reconnaître que le facteur scalaire s est, en général, différent de zéro.

Cela posé, je dis que les trois vecteurs u, u' et $x' = \frac{dx}{dt}$, forment un système indépendant. En effet l'hypothèse contraire

$$(uu'x') = ([uu']x') = s(ux') = 0 \ ,$$

donne $(ux') = 0$, donc aussi, à cause de $\frac{d}{dt}(ux) = 0$, l'équation $(xu') = 0$. Rapprochons alors les relations

$$(xu) = 0 \ , \qquad (xu') = 0 \ ,$$

des suivantes que nous savons exister

$$(uu) = 0 \ , \qquad (uu') = 0 \ ,$$

la comparaison donne $x = mu$, chose impossible, puisqu'il s'ensuivrait

$$(xx) = m^2(uu) = 0 \ , \text{ au lieu de } (xx) = 1 \ .$$

Les vecteurs u, u', x' sont donc nécessairement indépendants, et nous pouvons écrire avec trois facteurs indéterminés

$$x = mu + nu' + px' \ . \tag{15}$$

Portons cette valeur dans le système à résoudre soit (13).

Il faut d'abord que $(ux) = 0$, c'est-à-dire $p(ux') = 0$; mais il vient d'être établi que $(x'u)$ ne peut être nul, donc $p = 0$.

Substituons, en second lieu, la valeur (15) dans la formule $(xx) = 1$, nous avons $n^2(u'u') = 1$. Si donc la variable t a été choisie, comme plus haut, de manière que $(u'u') = 1$, on a $n = \pm 1$, ou plus simplement $n = 1$, en changeant s'il le faut le sens de la droite x.

Les diverses réductions précédentes ramènent (15) à la forme

$$x = mu + u' \ , \tag{16}$$

d'où l'on tire par différentiation

$$x' = \frac{dx}{dt} = m'u + mu' + u'' \; ; \tag{17}$$

transportons ces expressions dans le déterminant $\left(ux\,\frac{dx}{dt}\right)$ du tableau (13), elles donnent

$$r\rho = (uu'u'') = ([uu']\,u'')$$

De là diverses conséquences. Qu'on élève d'abord au carré, par la règle habituelle, ce déterminant $(uu'u'')$, il se présente sous la forme

$$(uu'u'')^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & (uu'') \end{vmatrix} = -1 \; ,$$

ainsi donc $(uu'u'') = \pm i$; il suffit d'ailleurs de changer, si besoin est, le sens de la droite u pour pouvoir écrire $(uu'u'') = i$.

Nous savons encore que $[uu'] = su$; donc, d'après ce qui précède,

$$i = ([uu']\,u'') = s(uu'') = -s(u'u') = -s \; ,$$

et enfin $s = -i$.

Nous venons de voir, en résumé, que la quatrième équation du système (13) se réduit à

$$\rho = \frac{i}{r} \; , \qquad s = -i \; .$$

La seule formule de ce tableau (13) qui reste encore à satisfaire par les équations (16) et (17) est la troisième, c'est-à-dire

$$(x'x') = \rho^2 \; , \qquad \text{soit} \qquad (x'x') + \frac{1}{r^2} = 0 \; .$$

Elevons au carré l'expression (17), nous aurons

$$m'^2(uu) + m^2(u'u') + (u''u'') + 2mm'(uu') + 2m'(uu'')$$
$$+ 2m(u'u'') + \frac{1}{r^2} = 0 \, ,$$

soit, toutes réductions faites par le moyen des identités $(uu) = 0$, $(u'u') = 1$,

$$2\,\frac{dm}{dt} = m^2 + (u''u'') + \frac{1}{r^2} \; . \tag{18}$$

Telle est l'équation de Riccati qui fournira dans le cas des horicycles la solution du problème proposé. Je n'en pousserai

pas plus loin la discussion; la suppression des imaginaires par la mise en évidence des coordonnées réelles de Lobatchewsky n'offre aucune difficulté et m'écarterait des questions que je voulais examiner ici.

§ 7. — *Le problème des développantes.* Le problème général des trajectoires des systèmes de cycles présente deux cas particuliers sur l'un desquels il n'est pas inutile de nous arrêter un instant. Ils correspondent, dans les équations (1), aux hypothèses $f(t) = 0$, ou $g(t) = 0$.

La première de ces suppositions n'est pas intéressante, le problème s'interprète aisément et se résout sans aucune intégration. La seconde hypothèse, sous l'une de ses formes, est équivalente au problème des développantes.

Si $g(t) = 0$, le système (1) se présente sous une forme bien connue

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \rho u_i , \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, 3 \tag{19}$$

et l'équation correspondante de Riccati prend la forme suivante, $h = \frac{g}{f}$ étant ici égal à zéro,

$$\frac{d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} = \gamma dt ;$$

la question est ainsi toujours réductible aux quadratures.

Il est d'ailleurs préférable d'éviter l'équation de Riccati et de procéder plus directement comme suit.

Prenons la relation $(ux) = 0$, différentions-la trois fois de suite en remplaçant toujours $\frac{dx}{dt}$ par ρu : nous obtenons de la sorte quatre équations linéaires relativement aux x et à ρ. Il suffira d'éliminer entre elles les quantités x pour obtenir l'équation différentielle relative à ρ ; cette équation, du second ordre, admet une intégrale première connue, à savoir la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (xx) = \text{const} ,$$

dans laquelle les x devront au préalable être remplacés par leur valeur en ρ.

Dans ces conditions le problème est sûrement réductible aux quadratures, ainsi que nous le savions déjà; mais, de plus, on déduit de son caractère de linéarité le résultat que voici :

Si y_i *et* z_i *sont deux solutions des formules* (19), *toutes les autres sont données par la relation*

$$x_i = ay_i + bz_i ,$$

où a *et* b *sont deux constantes quelconques.*

Or (xx) doit être égal à l'unité : de là cette autre conséquence :

Si y_i *et* z_i *sont deux solutions du problème, le produit scalaire* $(yz) = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3$ *est une constante.*

Tous ces résultats sont bien connus dans le cas des développantes, problème avec lequel le nôtre se trouve en fait coïncider. En voici la preuve.

1° Si, dans le problème de Lagrange, on suppose droit l'angle sous lequel la trajectoire cherchée doit rencontrer le faisceau des droites données, on tombe immédiatement sur le problème classique des développantes. La même chose aurait lieu si, dans le cas (2) du § 4, nous faisions nul le rayon de l'équidistante mobile dont il faut chercher la trajectoire. Dans cette interprétation, la relation $(yz) =$ const. montre que deux développantes différentes de la même courbe sont en même temps des lignes parallèles.

2° Transportons-nous du plan non-euclidien à l'espace de Lobatchewsky, et considérons la *surface centrale* d'une surface réglée, c'est-à-dire le lieu de ses normales centrales. Le problème se transforme ; il consiste maintenant à déterminer une surface réglée x à partir de sa surface centrale supposée connue.

Les équations, identiques à celles des développantes, sont toujours consignées dans le tableau (19). Par suite si y représente une première surface intégrale, toutes les autres surfaces intégrales x se déduisent de la première par les relations

$$(xy) = a , \qquad (xu) = 0 , \qquad (xx) = 1 .$$

La constante a peut être quelconque, réelle ou imaginaire : *il existe donc* ∞^2 *surfaces réglées possédant la même surface centrale.* En outre, d'après la signification de l'invariant (xy), *les génératrices correspondantes de deux de ces surfaces forment un angle constant et sont à une distance invariable l'une de l'autre.*

Toutes ces propriétés, nullement évidentes dans l'espace ordinaire, deviennent intuitives dans l'espace de Lobatchewsky. C'est un nouvel exemple de la simplification qu'offre le passage par la Géométrie non-euclidienne pour résoudre certains problèmes de Géométrie ordinaire. Je me dispenserai de chercher ici la forme la plus simple pour la solution du problème en Géométrie euclidienne.

3° Les mêmes équations différentielles (19) se rencontrent encore quand on cherche à résoudre, pour le plan de Lobatchewsky, la

question suivante. *Etant donnée une courbe réelle* S, *construire un faisceau de droites dont cette courbe soit la ligne de striction.*

Ce problème n'est qu'un cas particulier du précédent. Pour le déduire de ce dernier, il suffit d'imaginer des génératrices u perpendiculaires au plan de la figure par les divers points centraux qui forment la courbe S, tandis que le faisceau cherché doit être formé exclusivement de droites x appartenant au plan.

Il est clair, d'après cela, que *si on possède une première solution du problème, on aura toutes les autres en faisant tourner d'un angle constant quelconque les génératrices mobiles autour de leurs centres respectifs.*

Quoique ce dernier problème ne soit qu'une dégénérescence du précédent, il n'est toutefois pas hors de propos de montrer comment on retomberait sur le système (19) en procédant par une marche directe, moins élégante et moins expéditive, à coup sûr, que celle du début de ce paragraphe. Mais afin d'éviter la dissymétrie que présentent les coordonnées réelles de Lobatchewsky je me placerai ici dans le plan de Riemann.

Soient donc

$$X_i = u_i \cos r + x_i \sin r \,, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{20}$$

les équations paramétriques de la droite mobile. Ainsi u et x dépendent d'une variable t; u désigne un point, x une droite menée par u et perpendiculaire à la droite X, et l'on a $(ux) = 0$. Quant à r c'est le paramètre qu'il faut faire varier pour que, la droite X restant fixe, le point X représenté par les formules (20) décrive précisément cette droite.

Cela posé, on démontre facilement que la condition pour que u soit justement le point central de la droite mobile s'écrit

$$dx_1 du_1 + dx_2 du_2 + dx_3 du_3 = (dxdu) = 0 \;;$$

il faut toujours joindre à cette condition celle d'orthogonalité, ou $(xu) = 0$.

Pour vérifier ce système

$$(dxdu) = 0 \,, \qquad (xu) = 0 \,, \qquad (xx) = 1 \,, \tag{21}$$

faisons la supposition toujours admissible

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu + c[xu] \,, \tag{22}$$

avec trois scalaires inconnus a, b, c.

La condition $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(xx) = \left(x\frac{dx}{dt}\right) = 0$, donne $a = 0$. On déduit ensuite $\left(xu\frac{dx}{dt}\right) = \left([xu]\frac{dx}{dt}\right) = c([xu][xu]) = c$.

Multiplions enfin (22) par $\frac{du}{dt}$, pour former la première combinaison (21), il vient

$$\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{du}{dt}\right) = c\left(xu\,\frac{du}{dt}\right).$$

Il faut donc, pour que le premier membre soit nul, ou bien que c, ou bien que le déterminant $\left(xu\,\frac{du}{dt}\right)$ le soit aussi.

Adoptons d'abord la seconde hypothèse. Alors les relations

$$(xu) = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(xu\,\frac{du}{dt}\right) = 0$$

nous donneraient $x = \frac{du}{dt}$, si du moins on admet, ce qui est toujours possible, que la variable t représente l'arc de la courbe S. Cette équation $x = \frac{du}{dt}$, conséquence de la seconde hypothèse, signifie que la droite mobile X coïncide avec la tangente à la courbe S; et il est clair, en effet, que rien n'empêche de considérer le point de contact d'une courbe avec sa tangente comme une espèce de point central, mais il est clair aussi que ce cas n'est pas celui que nous visions. La seconde hypothèse est donc à rejeter.

Pour arriver au but, nous devons donc, dans (22), remplacer a et c par zéro. Les formules (21) et (22) réduisent alors ce système à cet autre

$$(xu) = 0\,, \qquad \frac{dx}{dt} = \rho u\,;$$

c'est le même que (19), par où apparaît derechef l'identité du problème actuel avec celui des développantes.