

# SUR LA DÉTERMINATION DES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE FAMILLE DE CERCLES

Autor(en): **Ballif, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16322>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*La trajectoire de l'éclaireur est donc la projection horizontale d'une hélice tracée sur un parabolôide hyperbolique à plan directeur horizontal.*

Posons enfin :

$$x_1 = z = aZ, \quad x = ia\sqrt{X}, \quad y = ia\sqrt{Y};$$

les équations de l'hélice deviennent

$$X + YZ = 0 \quad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

*Les hélices considérées sont donc affines, par voie complexe, aux lignes de longueur nulle d'un parabolôide hyperbolique. Cette dernière propriété présente une grande importance, car elle donne naissance à une nouvelle méthode de détermination des équations de la courbe de l'éclaireur : il suffit de rapporter le parabolôide à ses lignes de courbure pour réduire aux fonctions elliptiques la détermination de ses lignes de longueur nulle.*

23 mai 1915.

---

## SUR LA DÉTERMINATION DES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE FAMILLE DE CERCLES

PAR

L. BALLIF (Angoulême).

---

1. — Considérons d'abord une famille de cercles situés dans un même plan. Soient  $x, y$  les coordonnées du centre C d'un cercle,  $\theta$  l'angle du rayon CM avec  $ox$ , et  $X, Y$  les coordonnées d'un point M du cercle. Ecrivons que MC est tangent au lieu de M

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dY}{dX}$$

et comme

$$X = x + R \cos \theta, \quad Y = y + R \sin \theta,$$

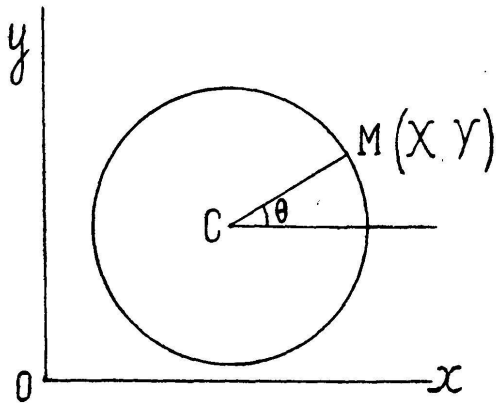


Fig. 1.

il vient

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy + R \cos \theta \cdot d\theta + \sin \theta \cdot dR}{dx - R \sin \theta \cdot d\theta + \cos \theta \cdot dR}$$

ou

$$\sin \theta dx - \cos \theta dy - R d\theta = 0 \quad (\text{I})$$

Il faut remarquer que cette équation différentielle est la même que  $R$  soit constant ou variable, puisqu'elle ne contient pas de terme en  $dR$ .

On peut encore l'écrire

$$\sin \theta \frac{dx}{R} - \cos \theta \frac{dy}{R} - d\theta = 0$$

et sous cette forme on voit que les coefficients de l'équation seront les mêmes pour deux familles de cercles telles que

$$\frac{dx}{R} = \frac{dx'}{R'}, \quad \frac{dy}{R} = \frac{dy'}{R'}$$

Deux familles satisfaisant à ces conditions sont dites *similaires*. Elles sont telles que, si à un point  $C$  du lieu des centres de l'une on fait correspondre un point  $C'$  du lieu des centres de l'autre, où les tangentes sont parallèles, le rapport des rayons des cercles de chaque famille en ces points soit égal au rapport des rayons de courbure des lieux des centres en ces points.

Pour le voir, il suffit d'élever au carré les égalités précédentes et de les ajouter

$$\frac{dx^2 + dy^2}{R^2} = \frac{dx'^2 + dy'^2}{R'^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{ds^2}{R^2} = \frac{ds'^2}{R'^2}$$

Ceci montre en passant que la recherche des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles peut toujours se ramener à celle d'une famille de cercles de rayon constant.

Ce fait est intéressant en ce sens que les procédés d'intégration mécanique donnent immédiatement les trajectoires d'une famille de cercles de rayon constant : en effet, si l'on

fait décrire à la pointe d'une tige de longueur constante la courbe lieu des centres C, et si l'autre extrémité porte une lame analogue à celle d'un planimètre de Pritz, cette lame tracera une trajectoire orthogonale  $\Gamma$ .

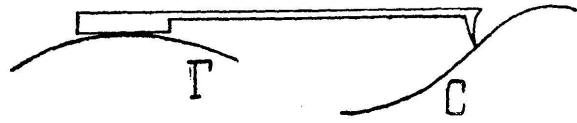


Fig. 2.

Ce cas particulier est encore digne d'attention à un autre point de vue, car il est

au fond le même que le problème de cinématique suivant :

*Sur quelle courbe  $\Gamma$  faut-il faire rouler une droite D, (sans glisser) pour qu'un point P du plan de cette droite décrive une courbe donnée à l'avance C ?*

On voit immédiatement que cette courbe  $\Gamma$  est la développée du lieu du point Q, projection de P sur D.

Or la tangente au lieu de Q, étant dirigée suivant QP, le lieu de Q est une trajectoire orthogonale des cercles de rayon constant PQ dont le centre est sur C.

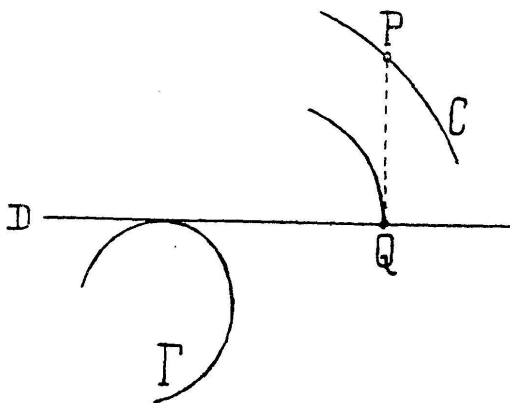


Fig. 3.

Ce problème peut avoir des applications intéressantes si la droite D est un levier qui s'appuie sur la came  $\Gamma$ . Il peut permettre des transformations de mouvements alternatifs en mouvements continus, ou réciproquement. Si le levier D est manœuvré à la main, on peut se donner la courbe C de façon que la main de l'opérateur

agisse dans les meilleures conditions (pointage des canons).

2. — Passons maintenant au *cas général*. Reprenons l'équation (I). Nous pouvons la transformer en posant :

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

il vient alors

$$2t dx - (1-t^2) dy - 2R dt = 0.$$

Si nous exprimons  $x$  et  $y$  en fonction d'un paramètre  $u$ , nous

pourrons encore écrire :

$$2 \frac{dt}{du} + \frac{y'}{R} (1 - t^2) - 2 \frac{x'}{R} t = 0 ,$$

ou

$$\frac{dt}{du} + \frac{y'}{2R} (1 - t^2) - \frac{x'}{R} t = 0 .$$

Pour ramener cette équation à la forme canonique de l'équation de Riccati nous pouvons choisir le paramètre  $u$  de façon à vérifier l'égalité

$$\frac{y'}{2R} = -1 .$$

On a alors

$$\frac{dt}{du} + t^2 - 1 - \frac{x'}{R} t = 0 ,$$

ou encore

$$\frac{dt}{du} + \left( t - \frac{x'}{2R} \right)^2 - 1 - \frac{x'^2}{4R^2} = 0 ,$$

ou mieux

$$\frac{d \left( t - \frac{x'}{2R} \right)}{du} + \left( t - \frac{x'}{2R} \right)^2 - 1 - \frac{x'^2}{4R^2} + \frac{d}{du} \left( \frac{x'}{2R} \right) = 0 .$$

Posons

$$t - \frac{x'}{2R} = \theta ,$$

on aura

$$\frac{d\theta}{du} + \theta^2 - 1 - \frac{x'^2}{4R^2} + \frac{d}{du} \left( \frac{x'}{2R} \right) = 0 ,$$

ou encore

$$\frac{d\theta}{du} + \theta^2 - 1 - \frac{x'^2}{y'^2} - \frac{d}{du} \left( \frac{x'}{y'} \right) = 0 . \quad (2)$$

La symétrie de cette équation en  $\frac{x'}{y'}$  et en  $\theta$  est remarquable. Nous savons intégrer cette équation dans un certain nombre de cas particuliers, notamment lorsque l'on a :

$$\frac{d}{du} \left( \frac{x'}{y'} \right) + \frac{x'^2}{y'^2} + 1 = \text{cte} ,$$

ou

$$\frac{d}{du} \left( \frac{x'}{y'} \right) + \frac{x'^2}{y'^2} - C' = 0 ;$$

on en tire

$$\frac{d\left(\frac{x'}{y'}\right)}{\frac{x'^2}{y'^2} + C} + du = 0$$

ou

$$\frac{dy}{2R} = \frac{d \cdot \operatorname{tg} \cdot \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + C},$$

si on pose

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x'}{y'} = \alpha.$$

Mais

$$dy = \rho \cos \alpha d\alpha$$

on a donc

$$\frac{\rho \cos \alpha d\alpha}{2R} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + C}$$

ou

$$2R = \rho \cos \alpha \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + C}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

formule qui donne la valeur de R en chaque point. Si l'on fait  $C = 1$  dans cette formule, elle se simplifie particulièrement et donne :

$$2R = \frac{dy}{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x'}{y'}}.$$

On aura, en appelant  $\rho$  le rayon de courbure de la courbe lieu des centres et  $ds$  son élément d'arc,

$$2R = \frac{\rho \cos \alpha d\alpha}{d\alpha} = \rho \cos \alpha,$$

ce qui donne une expression très simple du rayon du cercle en chaque point. On peut donc énoncer ce

**THÉORÈME :** *Si le centre d'un cercle décrit une courbe de façon que le rayon de ce cercle soit constamment égal à la moitié de la projection du rayon de courbure de cette courbe sur une direction fixe, on sait trouver les trajectoires de la famille de cercles ainsi formée.*

Si l'on fait  $C = 0$  on obtient

$$2R = \rho \cos \alpha \sin(2\alpha) \quad \text{ou} \quad 2R = \rho \sin \alpha \sin(2\alpha).$$

Nous savons encore intégrer l'équation (2) lorsque l'on a

$$\frac{d}{du} \left( \frac{x'}{y'} \right) + \frac{x'^2}{y'^2} + 1 = U^{-\frac{4k}{2k \pm 1}} \quad (k \text{ étant entier}) .$$

Mais, si l'on essayait de déterminer  $\frac{x'}{y'}$  en fonction de  $u$ , on ne le pourrait en général, puisque cette équation est encore du type de Riccati et qu'elle n'est pas généralement intégrable.

3. — Reprenons alors l'équation générale

$$\frac{dt}{du} - \frac{y'}{2R} t^2 - \frac{x'}{R} t + \frac{y'}{2R} = 0 \quad (I)$$

et essayons de la ramener à un type général d'équations de Riccati intégrables; par exemple au type

$$\frac{d\theta}{du} + \theta^2 - U^m = 0 ,$$

où  $m$  a la valeur  $\frac{-4k}{2k \pm 1}$ ,  $k$  étant un entier.

Posons  $\theta = \lambda V$ ,  $\lambda$  étant une fonction de  $u$ . On aura

$$\begin{aligned} \theta' &= \lambda V' + \lambda' V , \\ \lambda V' + \lambda' V + \lambda^2 V^2 - U^m &= 0 , \\ V' + \lambda V^2 + \frac{\lambda'}{\lambda} V - \frac{U^m}{\lambda} &= 0 . \end{aligned}$$

Choisissons  $\lambda$  de sorte que

$$\lambda = \frac{U^m}{\lambda} \quad \text{ou} \quad \lambda = U^{\frac{m}{2}} .$$

On aura alors

$$V' + U^{\frac{m}{2}} V^2 + \frac{m}{2} U^{-1} V - U^{\frac{m}{2}} = 0 ,$$

équation qui sera identique à (I) si on prend

$$U^{\frac{m}{2}} = -\frac{y'}{2R} , \quad \frac{m}{2} U^{-1} = -\frac{x'}{R}$$

ou

$$R \int -2u^{\frac{m}{2}} . du = y , \quad R \int -\frac{m}{2} u^{-1} . du = x ,$$

si l'on suppose R constant; ou

$$\left\{ \begin{aligned} y &= -R \frac{2u^{\frac{m}{2}+1}}{\frac{m}{2}+1} = -2R(2k+1)U^{2k+1} \quad \text{ou} \quad 2R(2k-1)U^{-\frac{1}{2k-1}} \\ x &= -\frac{m}{2}R \log U = +\frac{2k}{2k \pm 1} \cdot R \log U . \end{aligned} \right.$$

Ces équations définissent les courbes que doit décrire le centre d'un cercle de rayon constant pour que les trajectoires s'intègrent.

4. — Nous avons encore à signaler deux cas importants où l'on connaît des trajectoires particulières :

Le premier est celui où le rayon du cercle est proportionnel au rayon de courbure du lieu du centre de ce point : la trajectoire particulière est alors la développée à angle constant du lieu du centre; elle se réduit à la développée ordinaire lorsque le rayon du cercle est égal au rayon de courbure.

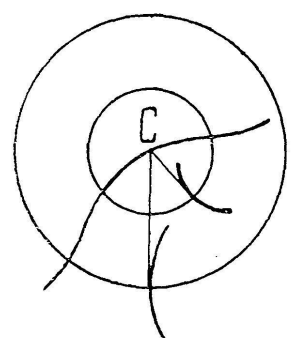


Fig. 4.

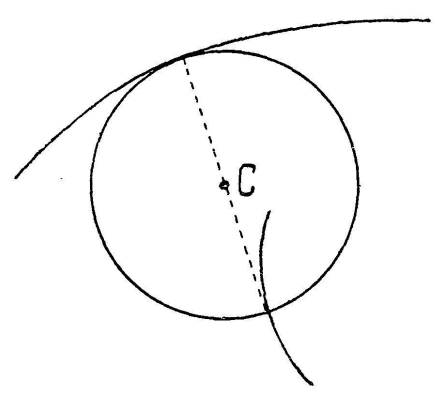


Fig. 5.

Le second est celui où le rayon du cercle est égal à la moitié du rayon de courbure de l'une des branches de son enveloppe, au point où le cercle touche son enveloppe. La trajectoire particulière est alors la développée de cette branche d'enveloppe.

Si l'on veut généraliser ce cas et lui faire fournir, comme au précédent, une infinité de cas d'intégration et non pas un seul, on peut dire : si une famille de cercles est telle que le rayon de chaque cercle est proportionnel au rayon de cour-



bure de l'une des branches de son enveloppe, il existe une famille de cercles dont les centres sont les mêmes et dont les rayons sont multipliés par un facteur constant, et dont on connaît une trajectoire particulière, qui est la développée de l'enveloppe de la première famille.

Si le lieu des centres devient une droite, l'enveloppe des cercles est alors une courbe de RIBAUCOUR. C'est sans doute par ce problème que Ribaucour a été amené à les considérer. On peut alors énoncer le théorème suivant :

*THÉORÈME : Une famille de cercles ayant leurs centres en ligne droite, et tangents à une courbe de Ribaucour, possède la propriété d'avoir ses trajectoires orthogonales déterminées sans quadratures.*

En effet on connaît trois trajectoires particulières : la développée de la courbe de Ribaucour, et deux fois la droite lieu des centres.

Il faut encore ajouter un certain nombre de cas bien connus où l'on peut déterminer complètement les trajectoires :

D'abord dans le cas où les cercles ont leurs centres en ligne droite (on a alors deux fois la droite comme trajectoire). Ensuite le cas où les cercles passent par un point fixe ; car une inversion ramène au problème des trajectoires d'une famille de droites, c'est-à-dire à la recherche de la développante de leur enveloppe, problème bien connu.

Puis le cas où l'enveloppe des cercles est une anallagmatique la trajectoire particulière est le cercle ayant pour centre le centre d'inversion et pour rayon la racine carrée de la puissance d'inversion.

Il en résulte que les cercles tangents à deux cercles fixes, à deux spirales logarithmiques égales de même pôle, mais tournées en sens inverse, aux cycliques planes, jouissent de cette propriété.

Les cercles tangents à deux spirales logarithmiques égales, de même pôle et de même sens ont deux trajectoires connues qui sont deux autres spirales logarithmiques de même pôle et de même sens.

Les cercles de rayon constant dont le centre décrit une chaînette rentrent dans l'un de nos cas d'intégration puisque

la projection du rayon de courbure de la chaînette sur une droite fixe est constante.

A chaque cas d'intégration on peut en faire correspondre un autre par voie d'inversion, mais on ne peut appliquer ceci qu'une fois, deux inversions se ramenant à une seule suivie d'une symétrie.

D'une façon plus générale, à chaque cas on peut en faire correspondre une infinité d'autres, dépendant d'une fonction arbitraire en donnant le lieu des centres d'une autre famille et en déterminant le rayon du cercle en chaque point de cette courbe par proportionnalité des rayons des cercles aux rayons de courbure en des points homologues.

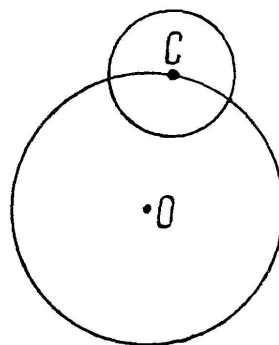


Fig. 6.

C'est ainsi, par exemple, que la famille composée de cercles de rayon constant dont le centre décrit un cercle nous donne la famille de cercles de rayon proportionnel au rayon de courbure du lieu des centres.

---

## SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UN SYSTÈME DE CERCLES ET SUR UN PROBLÈME CONNEXE DE GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

PAR

C. CAILLER, professeur à l'Université de Genève.

---

§ 1. — Dans un article publié en 1913 par les *Annales* de M. TEIXEIRA<sup>1</sup>, M. TURRIÈRE a résolu en coordonnées tangentielles le problème des trajectoires orthogonales des faisceaux de cercles à un paramètre variable. Il a consacré récemment à cette question un nouvel article paru dans l'*Enseignement mathématique*<sup>2</sup>, en étendant aux trajectoires de  $\infty^1$  courbes quelconques la méthode des coordonnées tangentielles.

<sup>1</sup> Voir tome VIII, *Annaes da Academia Polytechnica do Porto*.

<sup>2</sup> *Enseign. Math.*, tome XVI, 1914, p. 468.