# Exercices.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

plus petits et jouissant des mêmes propriétés; et ainsi de suite, ce qui implique contradiction avec le nombre limité des entiers inférieurs à ceux donnés d'abord.

Exemple. *L'aire d'un triangle ne saurait être un carré* (Fermat). Démonstration rétablie par Euler. Les trois côtés étant $f^2 + g^2$, $2fg$ et $f^2 - g^2$, l'aire A est $fg(f^2 - g^2)$ ; $f$ et $g$ sont premiers entre eux avec $f^2 - g^2$. Pour que A soit un carré, il faut que $f$, $g$ et $f^2 - g^2$ soient également des carrés; posons en conséquence $f = \lambda^2$, $g = \mu^2$; $f^2 - g^2 = \lambda^4 - \mu^4$ doit être un carré. Or $\lambda$ et $\mu$ sont premiers entre eux, de même que $\lambda^2 + \mu^2$ et $\lambda^2 - \mu^2$; ces deux derniers sont donc des carrés. Ecrivons donc

$$\lambda^2 + \mu^2 = r^2 \ , \quad \lambda^2 - \mu^2 = s^2 \ , \quad \text{d'où} \quad \mu^2 + s^3 = \lambda^2 \ , \quad s^2 + 2\mu^2 = r^2 \ \cdot$$

La dernière égalité donne, à cause de (19)

$$s = t^2 - 2u^2 \ , \quad \mu = 2tu \ , \quad r = t^2 + 2u^2 \ , \quad \text{d'où} \quad \lambda^2 = \mu^2 + s^2 = t^4 + 4u^4 \ ,$$

c'est-à-dire un triangle $t^2$, $2u^2$, $\lambda$ dont l'aire $A' = t^2u^2$ serait également un carré et qui serait beaucoup plus petit que le premier, car on a :

$$A = \lambda^2\mu^2(\lambda^4 - \mu^4) = 4t^2u^2(t^4 + 4u^4)(t^2 + 2u^2)^2(t^2 - 2u^2)^2 > A' \ .$$

On aurait ainsi la possibilité de trouver une suite indéfinie de triangles dans ce cas, ce qui est impossible puisqu'il s'agit de nombres entiers, qui ne peuvent indéfiniment décroître. (Voir *Ens. Math.*, 1909, p. 331, pour un autre exemple.)

## Exercices.

**1.** *Trouver graphiquement les développements de* (a + b) (c + d), *de* $(a \pm b)^2$, *de* $(a + b)(a - b)$, *de* $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ [1] (Euclide), *ainsi que la sommation d'une progression arithmétique* (Archimède).

**2.** *La somme des* n *premiers impairs successifs est un carré.*

[1] C'est de cette dernière figuration qu'on a tiré l'idée de remplacer les multiplications par des soustractions, à l'aide de tables de quarts de carrés.

*Il en est de même de deux triangulaires successifs*[1]. *Tout carré impair est la différence de deux triangulaires, et en même temps, l'octuple d'un triangulaire augmenté de l'unité* (Pythagoriciens). Se démontrent par des configurations géométriques de points.

3. *Démontrer géométriquement que si* (a, b) *est une solution de* $x^2 - 2y^2 = n$, $(2b + a, a + b)$ *en est une de* $x^2 - 2y^2 = -n$. Construisons le triangle rectangle isoscèle ABC; abaissons sur l'hypoténuse AC, la hauteur BD et d'un point E de BC, la perpendiculaire EF. On aura :

$$AF^2 + EF^2 = AB^2 + BE^2 \quad \text{ou} \quad (2b + a)^2 + a^2 = 2(a + b)^2 + 2b^2 ,$$

en posant $DF = b$, $FC = a$. Cette proposition semble due aux Platoniciens, qui s'en servaient pour trouver des approximations de plus en plus serrées de l'irrationnelle $\sqrt{2}$, en partant des solutions $a = 3$, $b = 2$, de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.

4. *Résoudre les équations*

$$1^\circ \ Ax = By \ ; \quad 2^\circ \ xy = Az \ ; \quad 3^\circ \ xy = uv \ ; \quad 4^\circ \ x^2 = yz \ ;$$
$$5^\circ \ x^2 = ay \ ; \quad 6^\circ \ xyz = tuv \ ; \quad 7^\circ \ x^3 = tuv \ ; \quad 8^\circ \ x^2y = u^2v \ .$$

1° Si A et B sont premiers entre eux, on pose $x = B\alpha$, $y = A\alpha$, $\alpha$ entier quelconque.

Si A et B ont $h$ comme p. g. c. d., on écrit: $hx = B\alpha$, $hy = A\alpha$.

2° Soit $A = ab$; on écrira $z = \gamma\delta$, $x = a\gamma$, $y = b\gamma$; $\gamma$ et $\delta$ quelconques. Il y a autant de solutions que de manières de décomposer A en deux facteurs.

3° On fera $x = \alpha\beta$, $y = \gamma\delta$, $u = \alpha\gamma$, $v = \beta\delta$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, quelconques.

4° On fera $x = \alpha\beta\gamma$, $y = \alpha^2\beta$, $z = \beta\gamma^2$.

5° Soit $a = b^2c$; on fera $x = bc\alpha$, $y = c\alpha^2$.

6° On écrira: $x = \alpha\beta$, $y = \gamma\delta$, $z = \varepsilon\varphi$, $t = \alpha\gamma$, $u = \beta\varepsilon$, $v = \delta\varphi$.

7° On écrira : $x = \alpha\beta\gamma$, $t = \alpha^2\beta$, $u = \beta^2\gamma$, $v = \gamma^2\alpha$.

[1] On appelle *triangulaire* un nombre de la forme $\frac{x(x+1)}{2}$.

8° On écrira : $x = \alpha\beta$, $y = \gamma^2\delta^2$, $u = \alpha\gamma$, $v = \beta^2\delta^2$ [1].

5. *Résoudre* $xy + Ax + By = C$. On a :

$$y = \frac{AB + C}{x + B} - A .$$

Soit $AB + C = ab$; on posera : $x = a - B$ ou $b - B$, d'où deux solutions pour chaque décomposition de $AB + C$ en deux facteurs (Euler).

6. *Résoudre* $x^2 + y^2 = z^2$. Posons $z = y + z'$, ce qui nous fera éliminer un carré [2]. Il viendra $x^2 = z'(2y + z')$, ce qui conduit à poser :

$$x = tuv , \quad z' = t^2u , \quad 2y + z' = uv^2 , \quad \text{d'où} \quad 2y = u(v^2 - t^2) , \quad 2z = u(v^2 + t^2) .$$

On retrouve la formule (10) présentée un peu plus généralement, telle qu'Euclide l'a donnée.

7. *Résoudre* $x^2 - y^2 = az^2$. Soit $a = fg$; on peut écrire :

$$x + y = f\lambda^2 , \quad x - y = g\mu^2 \quad \text{d'où} \quad 2x = f\lambda^2 + g\mu^2 , \quad 2y = f\lambda^2 - g\mu^2 , \quad z = \lambda\mu .$$

Il y a autant de solutions que de manières de décomposer $a$ en deux facteurs (Lagrange).

8. *Tout cube est égal à la différence de deux triangulaires successifs* (Ibn Almadjdi).

9. *Tout nombre de la forme* $x^2 \pm x + 1$ *est la somme de deux triangulaires* (de Roquigny). En général, *tout nombre* $x^2 \pm xy + y^2$ *est en même temps de la forme* $z^2 + 3w^2$ (Euler). Voir *Ens. Math.*, 1907, p. 441.

10. *Aucun nombre* $2(x^2 + y^2 + xy)$ *ne peut être un carré* (Fermat), *ni aucun des suivants* $2x^2 + 3y^2$, $2w^2 + y^2$, $3x^2 + 7y^2$, $5x^2 + 7y^2$, $6x^2 + 7y^2$, *ni le nombre* $2x^4 + 2$ (Euler).

*Si* a *et* b *ne sont pas tous les deux divisibles par* 3, *ou* 7, *ou* 11, *ou* 19, *ou* 23, ... *il en est de même de* $a^2 + b^2$.

---

[1] On multiplierait aisément ces exercices, et d'autres de genre analogue. En voici, par exemple, un dû à Cauchy : *les nombres* a, b, c *étant premiers entre eux, la solution générale de* $ax + by = cz$ *est donnée par les formules*

$$x = b\alpha - c\beta , \quad y = c\gamma - a\alpha , \quad z = b\gamma - a\beta .$$

[2] Ce procédé d'élimination d'un carré de l'énoncé est dû à Diophante, qui pour résoudre $x^2 + ax + b = y^2$, égale le premier membre à $(x + z)^2$, ce qui lui donne $x = \dfrac{z^2 - b}{a - 2z}$, d'où une infinité de valeurs fractionnaires de $x$, en faisant $z = 1, 2, 3, \ldots$

**11.** *Tout nombre* $2a^2 - b^2$ *est en même temps de la forme* $x^2 - 2y^2$. *Tout nombre* $5a^2 - b^2$ *est en même temps de la forme* $x^2 - 5y^2$ (Lagrange). En général, *on a cette identité de Mathews Collins*

$$(g^2a)^2 - (f^2 + g^2)b^2 = (f^2 + g^2)(ga \pm fb)^2 - [(f^2 + g^2)b \pm fga]^2 .$$

**12.** *Le double d'un nombre de la forme* $x^2 + y^2 + xy$ *est une somme de trois carrés, et le double de son carré, la somme de trois bicarrés* (Catalan). *Il en est de même du nombre* $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ (Ed. Lucas).

**13.** $a^{2n+1} \pm 1$ *n'est jamais divisible par* $a^2 - 1$. En effet, le quotient de $a^{2n} \pm 1$ par $a \pm 1$ peut s'écrire

$$a(a \mp 1)(a^{2n-2} + a^{2n-4} + \ldots + 1) + 1 .$$

**14.** *Posons* $F = ax^2 + 2bxy + y^2$, $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$; *on trouvera, en substituant, une nouvelle forme* $F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ *telle que* $b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$. *Tout nombre représentable par la forme* F *l'est par la forme* F', *et la réciproque a lieu également si* $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ (Lagrange).

**15.** 1° Faisant dans (23) $d = \delta = 0$, on arrive à cette conclusion que *le produit de deux sommes de trois carrés est une somme de quatre carrés*[1] (Euler).

2° Chercher l'expression du produit de la somme de quatre carrés par $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0$, par $4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, par $4 = (-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, par $5 = 4 + 1 + 0 + 0$, par $6 = 4 + 1 + 1 + 0$, par $7 = 4 + 1 + 1 + 1$, par $10 = 4 + 4 + 1 + 1$, etc.; on obtiendra ainsi diverses formules, dont les trois premières sont dues à Euler, Cauchy et Jacobi.

3° *On trouvera une généralisation de* (23), due à Lagrange, *en y changeant* $\beta, \gamma, \delta, \beta'$ $\gamma'$ $\delta'$ en $\beta\sqrt{k}$, $\gamma\sqrt{l}$, $\delta\sqrt{kl}$, $\beta'\sqrt{k}$, $\gamma'\sqrt{l}$, $\delta'\sqrt{kl}$.

**16.** *Soit* A *le produit de nombres impairs* a, a', a'', ... *les deux nombres*

$$\frac{A-1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a-1}{2} + \frac{a'-1}{2} + \ldots$$

---

[1] Cauchy a fait voir que ce théorème résulte de la considération d'un triangle projeté sur trois plans rectangulaires.

*sont respectivement de même parité que les suivants*

$$\frac{A^2-1}{8} \quad \text{et} \quad \frac{a^2-1}{8}+\frac{a'^2-1}{8}+\ldots \qquad \text{(Gauss)}$$

**17.** *Toute sixième puissance est de l'une ces formes* $7+0, 1$; *toute dixième puissance, de l'une des formes* $11+0, 1$; *toute douzième, de l'une des formes* $13+0, 1$; *toute seizième, de l'une des formes* $17+0, 1$; *etc.* Par exemple, on a, pour les carrés, les formes $7+0, 1, 4, 2$; d'où, pour celles des bicarrés, $7+0, 1, 2, 4$; et pour les sixièmes puissances, $7+0, 1, 1, 1$.

**18.** Divers problèmes de Goldbach et d'Euler. Voir *Ens. Math.*, 1909, pp. 354 et 355.

**19.** *Le quadruple d'un triangulaire ne peut être un triangulaire* (de Rocquigny). On devrait avoir $x^2+x=4y^2+4y^2$, égalité qui revient à l'une quelconque des suivantes :

$$x^2+x+1=(2y+1)^2\,, \qquad 2x+1=\pm\sqrt{4(2y+1)^2-3}\,,$$
$$(4y+2x-3)(4y-2x+1)=3\,, \qquad (x+2y+2)(x-2y)=x\,,$$

dont l'impossibilité est aisée à démontrer, car le premier membre de la première ne peut être un carré; 3 ne peut être la différence d'autres carrés que 4 et 1; enfin les deux dernières ne peuvent avoir lieu que pour $x=y=0$. (*I. M.*, 1894, pp. 303 et 394.)

**20.** *Si* a *est premier avec* b, *les congruences* $n \equiv h$ (*mod* a) *et* $n \equiv h$ (*mod* b) *entraînent la suivante* $n \equiv h$ (*mod* ab). En effet le nombre $n-h$ étant divisible par $a$ et $b$, l'est par $ab$. Cette question s'étend à un nombre quelconque d'entiers premiers entre eux : c'est un cas particulier de la suivante, qui remonte à l'antiquité : *trouver un nombre qui, divisé par* a, b, c, ... *donne les restes* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ...

**21.** *Tout nombre impair est* $8+1$ *si ses facteurs de forme* $8+3, 5, 7$ *sont tous en nombre pair ou tous en nombre impair.* Zéro est compté pour un nombre pair.

**22.** a *et* b *étant premiers entre eux, si* $ax-by=1$, *les nombres*

$$x=\alpha c+\lambda b\,, \qquad y=\beta c+\lambda a$$

*satisfont à l'équation* $ax-by=c$.

**23.** *Des solutions des équations*

$$ax - by = c\ , \qquad ax' - b'y' = c\ , \qquad ax'' - b''y'' = c\ , \ \ldots$$

*déduire celles de* $ax - bb'b'' \ldots y = c$ (Gauss).

**24.** Soit l'équation $a^2x^2 + bx + c = y^2$. Posons $y = ax + \frac{z}{u}$, on en tirera une expression de $x$, en $z$ et $u$ qui donnera les valeurs positives de $x$ en donnant à $z$ et $u$ des valeurs telles que $\frac{b}{2a} \gtreqless \frac{z}{u} \gtreqless \sqrt{c}$.

2° Soit $ax^2 + bx + c^2 = y^2$. On posera $y = c + \frac{z}{u}x$, ce qui donnera pour $x$ une formule analogue. On s'occupera seulement des valeurs de $\frac{z}{u}$ comprises entre $\sqrt{a}$ et $\frac{b}{2c}$.

3° Le cas général $ax^2 + bx + c = y^2$ est bien moins aisé à résoudre; aussi il faut tout d'abord tâcher de voir s'il n'y a pas impossibilité, comme c'est le cas pour $13x^2 + 54x + 69 = y^2$, puisque le premier nombre peut s'écrire $7(x + 3)^2 + 6(x + 1)^2$.

4° On sait que si $b^2 - 4ac$ est un carré, le trinome $ax^2 + bx + c$ peut se décomposer en deux facteurs linéaires. On peut donc le supposer égal à $(ax + f)(x + g)$ ou à $\frac{u^2}{v^2}(x + g)^2$, d'où on tire $x$, qui sera entier si on fait $v^2 a - u^2 = \pm 1$ (Euler).

Si $ax^2 + bx + c$ peut se mettre sous la forme $(fx + g)^2 + (hx + j)(kx + l)$, on égalera sa racine carrée à $(fx + g) + \frac{u}{v}(hx + j)$, ce qui donnera une valeur de $x$ en $u$ et $v$ dont on essaiera d'égaler le dénominateur à $\pm 1$ (Euler).

6° Résolvons algébriquement $ax^2 + bx + c = y^2$ par rapport à $x$; on est ramené, en posant $X = 2y$, $b^2 - 4ac = B$, à résoudre $aX^2 + B = Y^2$, ce qu'on fait en donnant des valeurs convenables à Y. Inutile d'ailleurs de prendre $Y > \frac{a}{2}$, puisque $(Y \pm ka)^2 - B$ est divisible par $a$, en même temps que $Y^2 - B$. Si jusqu'à $Y = \frac{a}{2}$ on ne trouve aucune solution, l'équation est insoluble (Lagrange).

**25.** *Soit* $ax^2 + 2bcx + c^2 = y^2$ *et supposons* $x > b$ *et* $> c$; *la valeur de* $y$ *est de la forme* $zx^2 - bx + c$.

**26.** *Déterminer les valeurs de* x *supérieures à* b *et à* c *données par l'équation* $a^2x^2 + bx + c = y^2$. On a :

$$\frac{b+1}{2a} > y - ax > \frac{b}{2a+1} .$$

$y$ est de la forme $ax + d$ avec $d < x$, car $x > b > \frac{b+1}{2a} > d$. En écrivant $a^2x^2 + bx + c = (ax + d)^2$, il vient $(b - 2ad)x + c - d^2 = 0$. On essaie, dans cette expression, les valeurs de $d = y - ax$ comprises entre les limites données plus haut (*S. Œ.*, 1910, p. 146).

**27.** *On peut toujours former une puissance entière quelconque par l'addition de termes d'une progression arithmétique* (Rallier des Ourmes). Application à l'étude des suites formées :

1° par le premier entier 1 ; la somme, 2 + 3, des deux suivants ; celle, 4 + 5 + 6, des trois suivants ; etc.

2° par le premier entier 1 ; la somme, 2 + 3 + 4, des trois suivants ; celle des cinq suivants ; etc.

3° par le premier impair ; la somme des deux suivants ; etc.

4° par la somme des deux premiers impairs ; celle des quatre suivants ; etc.

5° par le premier impair ; la somme des quatre premiers ; celle des neuf premiers ; etc.

6° par le premier impair ; la somme des (1 + 4) suivants ; celle des (1 + 4 + 9) suivants ; etc.

7° par le premier impair ; la somme des (1 + 8) suivants ; celle des (1 + 8 + 27) suivants ; etc. (de Rocquigny).

**28.** *Combien de zéros dans les* n *premiers entiers ?* (Ed. Lucas).

**29.** *Le nombre* 1000 ! *se termine à droite par* 249 zéros (de Rocquigny).

**30.** *Quels sont les derniers chiffres à droite de* $2^{1000}$, de $3^{1000}$ ? (id.)

**31.** *Il y a quinze nombres dans les* $1000^{1000}$ *premiers entiers qui sont à la fois carrés, cubes, bicarrés, ... dixièmes puissances* (de Laplanche)[1].

---

[1] On peut rappeler ici le *problème de Comiers*, jadis célèbre : *quel est le produit des deux nombres formés respectivement de* 666 *chiffres* 9 *et de* 666 *chiffres* 6 ?

**32.** *Dans quatre cents ans, combien de mois de février de cinq dimanches ?* (N. A.) *Combien de vendredis* 13 ? (Buray) *Il y a au plus trois de ces derniers et au moins un annuellement* (G. Tarry).

**33.** *La série de Fibonacci* 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ *ne peut avoir que quatre ou cinq termes d'un nombre donné de chiffres* (Lamé). Cela vient de ce que si

$$u_k < 10u_{k-4} < u_{k+1} \qquad \text{et} \qquad u_{k+1} < 10u_{k-3} < u_{k+2} \ ,$$

il s'ensuit $u_{k+2} < 10u_{k-2} < u_{k+3}$.

**34.** *Disposer les douze premiers entiers sur trois lignes, qui donnent des sommes égales, et de telle manière que, dans chacune des quatre colonnes, le plus grand des trois nombres soit égal à la somme des deux autres.*

**35.** *Placer les neuf premiers nombres aux sommets et sur les côtés d'un triangle, de manière que la somme des nombres d'un côté quelconque soit constante, ainsi que celle de leurs carrés* (Proth). Appelons $x$, $y$, $z$ les trois sommets; les valeurs des deux expressions $x + y + z$ et $x^2 + y^2 + z^2$ sont toutes deux des multiples de 3, ce qui demande que $x$, $y$, et $z$ soient ensemble **3** ou **3** + 1 ou **3** — 1. De là trois solutions, dont la seconde seule 2, 5, 8 est à conserver. Le reste s'achève facilement.

**36.** *Le carré d'un polynome de* $2^k$ *termes ayant autant de termes négatifs que de positifs contient* $2^{2k-2}$ *doubles produits négatifs et* $2^{k-1}(2^{2k-1} - 1)$ *doubles produits positifs* (Barbette).

*Pour que le carré d'un polynome de* n *termes présente autant de doubles produits positifs que de négatifs, il faut que* n *soit un carré, et alors il y a* $\frac{n + \sqrt{n}}{2}$ *termes positifs* (Id.)[1].

**37.** *Quel est le signe du* $n^{\text{ième}}$ *terme du développement du produit*

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \ldots ? \qquad \text{(Catalan)}$$

Montrer l'identité de ce problème avec le suivant : *considérons les lettres* a, b, *que nous ferons suivre du groupe ren-*

---

[1] A rapprocher de la question suivante : *trouver le produit de deux expressions de la forme* $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \ldots$ *qui ne diffèrent qu'en ce que, dans la deuxième, certains radicaux sont pris avec le signe* —. Voir Fitz-Patrick, *Exercices d'Arithmétique*, p. 575.

*versé* ba, *d'où le groupe* abba, *auquel nous accolerons le groupe inverse, ce qui nous donnera* abbabaab, *et ainsi de suite. Quelle est la* $n^{\text{ième}}$ *lettre?* (Laisant). Voir *A. F.*, 1881.

**38.** Soit $a$ la base de numération ; $a^n - 1$ *est divisible par* $a - 1$ ; il s'ensuit que *tout nombre* $N = A^n + B^{n-1} + \ldots$ fournit la relation $N \equiv A + B + \ldots$ *(mod* $a - 1$*)* et que *l'un des nombres* $a^n \pm 1$ *est divisible par* $a + 1$ *selon que* n *est pair ou impair*. Donc si $n$ est pair, on a : $N \equiv A - B + C - \ldots$ (mod $a + 1$) (Gauss).

**39.** *Soit* d *un diviseur de* $a10^b \pm c$. *Un nombre est divisible par* d *quand, ayant séparé* b *chiffres à la droite de ce nombre et divisé le nombre restant à gauche par* a, *la somme ou la différence entre* c *fois le quotient et le nombre formé en écrivant le nombre de droite à la droite du reste est divisible par* d (E. Gelin). Voir les *Caract. de div.* du même auteur, et les *Ex. d'Arith.* de Fitz-Patrick, pp. 24 et seq.

**40.** 1° L'expression $(a + 1)^n - a^n$ est la somme des $n$ termes

$$(a + 1)^{n-1}\ , \qquad (a + 1)^{n-2}a\ , \qquad (a + 1)^{n-3}a^2\ , \ \ldots\ a^{n-1}\ ,$$

et par suite elle comprend visiblement $n$ fois le terme $a^{n-1}$, plus des termes en $a^{n-2}$, en $a^{n-3}$, ... On peut donc écrire :

$$(\alpha) \qquad (a + 1)^n - a^n = na^{n-1} + Aa^{n-2} + \ldots + La + 1\ [1]\ .$$

2° Soit la suite de fonctions

$$F_1(x) = F(x + 1) - F(x)$$
$$F_2(x) = F_1(x + 1) - F_1(x)$$
$$F_3(x) = F_2(x + 1) - F_2(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les fonctions $F_1$, $F_2$, $F_3$, ... sont appelées la *différence première*, la *différence seconde*, la *différence troisième*, ... de la fonction F. Posons maintenant

$$F(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Lx + M\ ;$$

sa différence première $F(x + 1) - F(x) = F_1(x)$ contiendra

[1] Voir *Ens. Math.*, 1907, p. 297.

le terme $nAx^{n-1}$, plus des termes en $x^{n-2}$, ... On peut donc écrire $F_1(x) = nAx^{n-1} + B'x^{n-2} + \dots$ La différence seconde est donc de la forme

$$n(n-1)Ax^{n-2} + B''x^{n-3} + \dots$$

La différence troisième est de la forme $n(n-1)(n-2)Ax^{n-3} + B'''x^{n-4} + \dots$ On voit qu'on a :

$$F_n(x+1) + F_n(x) = n(n-1) \dots 2 \,.\, 1A \,.$$

Ainsi *la différence* n^ième^ *du polynome* $Ax^n + \dots$ *est égale à* $An$ ! proposition connue des Anciens, mais laissée sans démonstration jusqu'à Mercator.

3° La fonction

$$F(x, k) = x - C^k(x-1)^n + C_{n,2}(x-2)^n - \dots$$

est du degré $n$, et par suite sa différence $n^{\text{ième}}$ a pour valeur $n$ ! Or, à cause de (16), on trouve, pour l'expression de ses différences première, seconde, ... $n^{\text{ième}}$,

$$F(x+1, k) - F(x, k) = F(x+1, k+1) \,,$$
$$F(x+2, k+1) - F(x+1, k+1) = F(x+3, k+2) \,,$$
$$\dots\dots F(x+n, k+n) = n\,!$$

Faisant $x + n = a$, $k = 0$, il vient cette identité de Mercator

$$a^n C_{n,1}(a-1)^n + C_{n,2}(a-2)^n - \dots \pm 1 = n\,! \qquad (a \geqq a) \,.$$

4° *Si* a *et* b *sont premiers entre eux, tout diviseur commun à* a — b *et à* $\dfrac{a^n - b^n}{a - b}$ *divise également* n (Lebesgue). Il suffit de changer dans (α) $a$ en $\dfrac{b}{a-b}$.

Lebesgue démontre ce théorème à l'aide de la formule du binome. Malebranche, qui l'avait aussi rencontré (voir Ch. Henry, *Rech. sur les man. de Fermat*, p. 92), en donne une démonstration dont le principe pourrait être utilisé ailleurs : tout diviseur commun à $a - b$ et à $a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \dots$ divise $a^{n-2}(a-b) = a^{n-1} - ba^{n-2}$, et par suite $-2ba^{n-2} - b^2a^{n-3} - \dots$ ; or il divise $2ba^{n-3}(a-b)$

$= 2ba^{n-2} - 2b^2a^{n-3}$, il s'ensuit qu'il divise aussi $-3b^2a^{n-3} - b^3a^{n-4} - \ldots$; on voit qu'on arrivera à prouver qu'il divise $nb^n$.

**41.** *Les nombres* $A_k$ *et* $B_k$ *de la formule* $(a + \sqrt{b} = A_k + B_k\sqrt{b}$ *se calculent, de proche en proche, d'après les formules suivantes d'Euler*

$$A_{n+1} = aA_n + bB_n \ , \qquad B_{n+1} = A_n + aB_n \ ;$$

$$A_{n+1} = 2aA_n - (a^2 - b)A_{n-1} \ , \qquad B_{n+1} = 2aB_n - (a^2 - b)B_{n-1} \ .$$

**42.** *Les nombres* $y^2 - 3z^2$ *et* $3y^2 - z^2$ *ne peuvent être premiers qu'autant qu'ils sont respectivement des formes* $12 + 1$, et $12 - 1$.

*Si le nombre* $y^2 - 5z^2$ *est premier, il ne peut être que de l'une des quatre formes* $20 \pm 1, \pm 9$.

**43.** *Tout nombre* $a^2 + 1$ *en divise une infinité d'autres isomorphes.* En effet

$$(a^2 + 1)[(ax + 1)^2 + x^2] = (a^2x + x + a)^2 + 1 \ .$$

Plus généralement, *le nombre* $n = ka^2 + lb^2$ *divise une infinité de nombres de la forme* $x^2 + kly^2$, *qui sont en même temps de la forme* $kx^2 + ly^2$ (Euler). En effet, on a :

$$n(1 + kl) = (ka \pm lb)^2 + kl(a \mp b)^2 = k(a \pm lb)^2 + l(b \mp ka)^2 \ .$$

**44.** *Tout diviseur commun aux nombres* $a^2 - kb^2$, $c^2 - ld^2, \ldots$ *divise également un nombre de la forme* $x^2 - kl \ldots y^2$. En effet, il divise

$$a^2(c^2 - ld^2) + ld^2(a^2 - kb^2) = (ac)^2 - kl(bd)^2 \ . \qquad \text{(Lagrange)}$$

**45.** Posons $X = xx' - Qyy'$, $Y = xy' + yx' + Pyy'$, il viendra, si $a$ et $b$ sont les racines de l'équation $z^2 - Pz + Q = 0$,

$$(x + ay)(x' + ay') = X + aY \ .$$

Or on a : $(x + ay)(x + by) = x^2 + Pxy + Qy^2$; donc *le produit de deux nombres de la forme* $x^2 + Pxy + Qy^2$ *est isomorphe* (Lagrange).

**46.** Dans (21) changeons $k$ en $\frac{k}{l}$, puis dans (8), $a$, $c$, $b$, $d$, respectivement en $a\sqrt{k}$, $b\sqrt{l}$, $\alpha$, $\beta\sqrt{kl}$; il viendra deux nouvelles formules, dues à Euler, lesquelles, avec (8), montrent que *le produit d'entiers des deux formes* $ax^2 + by^2$ *et* $x^2 + aby^2$ *est de la première ou de la seconde forme, selon que le nombre de ceux de la seconde est pair ou impair* (Euler).

**47.** 1° Faisant dans (9) $\alpha = a^2 + b^2$, $\beta = c^2$, on obtiendra une formule d'Euler permettant de décomposer le carré d'une somme de trois carrés en une somme de trois carrés.

2° Faisant $\alpha = a^2 + 1$, $\beta = a$, on trouvera une identité dont Euler s'est servi pour l'étude du produit $(1 + a + a^2)(1 + a^2 + a^4)(1 + a^4 + a^8)\ldots$

3° Faisant $\alpha = x^2 + Q$, $\beta = \sqrt{2(Q - P)}x$, on aura une extension de (11), qui en donne une de l'identité d'Aurifeuille, en posant $Q - P = a$, $x = (2a)^{\frac{2n+1}{2}}$. On peut trouver d'autres cas intéressants, par exemple en faisant $Q = 1$, $P = -\frac{1}{2}$, $x = 3^{\frac{2n+1}{2}}$; ces extensions sont dues à Catalan.

4° Faisant $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et $\beta = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, on aura un moyen, dû à Ed. Lucas, de décomposer le carré d'une somme de quatre carrés en une somme de quatre carrés.

5° Faisant $\alpha = Ax^3 + Cx$ et $\beta = Bx^2 + D$, il vient, en identifiant à $x^6 - 1$,

$$A = D = 1\ , \quad 2C - B^2 = 0\ , \quad C^2 - 2B = 0\ , \quad B = C = 2\ ,$$

d'où une remarquable identité, due à A. Boutin.

6° Faisant, de deux manières différentes, le produit de $2(a + b)(c - d)$ par $2(a - b)(c + d)$, à l'aide de cette transformation de (9)

$$2f.\,sg = (f + g)^2 - (f - g)^2\ ,$$

où on fait $f = a^2 - b^2$, $g = c^2 - d^2$, on obtiendra une identité de forme $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, trouvée par B. af Genäs.

**48.** *Si* $ax - by = 1$, *les valeurs* $X = y^2(3ax - by)$ *et* $Y = x^2(3by - ax)$ *satisfont à l'équation* $b^2X - a^2Y = 1$ (Bouniakowsky)[1]. On n'a qu'à changer $\alpha$ et $\beta$ en $\frac{a}{y}$ et $\frac{b}{x}$ dans l'identité $(\alpha - \beta)^3 = (3\alpha - \beta)\beta^2 - (3\beta - \alpha)\alpha^2$.

[1] Le savant russe est arrivé à cette conclusion, ainsi qu'à d'autres plus générales, à l'aide de la formule d'intégration par parties.

**49.** *Soit* $f^3 + ag^3 = bh^3$; *on aura une autre solution de* $x^3 + ay^3 = bz^3$ *en faisant*

$$x = f(f^3 + 2ag^3) \; , \quad y = -g(2f^3 + ag^3) \; , \quad z = h(f^3 - ag^3) \; . \qquad \text{(Euler)}$$

Prestet avait trouvé, avant Euler, le cas particulier de $a = b = 1$.

**50.** Effectuant, de deux manières différentes, le produit

$$(f + g\sqrt{-k})^4 (f - g\sqrt{-k})^4 \; ,$$

on aura une identité de A. Boutin donnant une solution de $x^4 = y^2 + kz^2$.

**51.** Posant $k\sqrt{a} + l\sqrt{-b} = (x\sqrt{a} + y\sqrt{-b})^3$, puis égalant les coefficients de $\sqrt{a}$ et ceux de $\sqrt{-b}$, il vient

$$k = ax^3 - 3bxy^2 \; , \qquad l = 3ax^2y - by^3 \; ,$$

d'où

$$ak^2 + bl^2 = (ax^2 + by^2)^3 \; . \qquad \text{(Euler)}$$

**52.** Développant l'expression $(a + bi)^3(a - bi)^3$ et l'identifiant à $(a^2 + b^2)^3$, on trouvera un cas particulier de l'identité précédente, qui montre à déterminer un cube qui soit la somme de deux carrés (Euler).

**53.** *Théorème de Binet.* Voir *Ens. Math.*, 1907, p. 303, ex. 11.

**54.** *Egalités multiples.* Voir *Ens. Math.*, 1914, p. 18.

**55.** *Factorisation.* Voir *Ens. Math.*, 1913, p. 202 et seq. passim.

**56.** *Fractions continues.* Voir *Ens. Math.*, 1912, p. 184 et seq. passim.

**57.** *Carrelages.* On obtient de remarquables carrelages en considérant comme axes de coordonnées deux droites rectangulaires d'une feuille *quadrillée* et mettant la case $(x, y)$ en gris ou en noir, selon que le reste de la division de $\alpha(x^2 + y^2)$ par $n$ est de la forme $\mathbf{3} + 1$ ou de la forme $\mathbf{3} - 1$. Voir *S. Œ.*, 1912.

**58.** *Triangles.* 1° *L'une des cathètes du triangle* $x^2 + y^2 = z^2$ *est toujours paire* (Frénicle). On la désignera par $2fg$.

2° *Tous les triangles sont donnés par la formule d'Euclide* (ex. n° 6). Conséquence de 1°. Les deux générateurs sont, dans ce qui suit, désignés par $f$ et $g$.

3° *L'hypoténuse est de l'une des formes* $\mathbf{12}+1$, 5 (anonyme arabe). Le triangle étant primitif, $z=f^2+g^2$ est impair, et $z^2$, de la forme $\mathbf{4}+1$.

4° *Une cathète est multiple de* 3 *et une autre, multiple de* 4 (Frénicle).

5° *L'un des côtés est multiple de* 5 (Id.). On examine les formes linéaires de $f$ et de $g$ relativement au module 5.

6° *La somme et la différence de deux cathètes sont de l'une des formes* $\mathbf{8}\pm 1$ (Id.).

7° *Le seul triangle* 3, 4, 5 *a ses côtés en progression arithmétique. Il n'y en a aucun les ayant en progression géométrique* (Ozanam).

8° *Si les générateurs* $\mathrm{f}$, $\mathrm{g}$ *sont deux triangulaires consécutifs, le côté* $\mathrm{f}^2-\mathrm{g}^2$ *est cube* (Id.).

9° *Si* $\mathrm{f}=\mathrm{g}+1$, *l'hypoténuse surpasse de* 1 *la cathète paire* (Id.).

10° *Si les deux cathètes diffèrent de* 1, *le triangle ayant pour générateurs* $(2\mathrm{f}+\mathrm{g})$ *et* $\mathrm{f}$ *sera dans le même cas* (Fermat).

11° *Si l'on prend pour générateurs deux termes successifs de la série* 1, 2, 5, 12, 29, 70, ... *les deux cathètes diffèrent de* 1 (Ozanam). C'est le théorème précédent de Fermat[1].

12° *Trouver un triangle dont la bissectrice soit rationnelle* (Diophante). Il faut rendre rationnelle l'expression $2f\sqrt{f^2+g^2}$, ce qui se fait en posant $f=k(\varphi^2-\gamma^2)$, $g=k(2\varphi\gamma)$.

13° *Trouver un triangle dont le périmètre soit un carré* (Id.). Il s'agit d'égaler à un carré le nombre $2f(f+g)$, ce qu'on fait en écrivant $f=2u^2$, $g=v^2-2u^2$.

14° *Trouver un triangle dont la somme des cathètes soit un carré* (Teilhet). La question se ramène à rendre carré le nombre $f^2+2fg-g^2$; on y arrive en faisant

$$f=u^2-2uv+v^2\ , \qquad g=2uv\ ,$$

15° *Trouver trois carrés en progression arithmétique* (Fibo-

[1] En général si les deux premiers termes sont 1, $a$, les cathètes successives diffèrent de $a^2-2a-1$. On peut d'ailleurs continuer la série en remontant : ainsi, pour $a=4$, on a : ... $-19$, 8, $-3$, 2, 1, 4, 9, 22, ... C'est vraisemblablement ainsi qu'Ozanam a trouvé la liste des triangles dont les cathètes diffèrent de 7 (*Dict. math.*). On voit qu'il pratiquait virtuellement la théorie des séries récurrentes.

nacci). Comme on a :

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2) ,$$

le problème est ramené à faire $a = f^2 - g^2$, $b = 2fg$, ce qui donne l'identité

$$(f^2 - g^2 - 2fg)^2 + (f^2 - g^2 + 2fg)^2 = 2(f^2+g^2) .$$

Cette solution paraît due aux Arabes[1]. Fibonacci a fait remarquer que la raison $4fg(f^2 - g^2)$ est divisible par 24; il en déduit la solution du système $x^2 + y^2 = u^2$, $x^2 - y = v^2$.

On est ramené à ce même problème en cherchant un *triangle dont la seconde bissectrice soit rationnelle,* ou encore, en cherchant avec A. Boutin *trois triangulaires en progression arithmétique.*

16° *Trouver deux triangles tels que la différence des deux plus grands côtés de chacun soit égale à celle des deux plus petits de l'autre* (Frénicle). Voir *Œuvres de Fermat,* t. IV, p. 253.

17° *Trouver trois triangles dont les aires soient égales* (Diophante). Les valeurs

$$x = k^2 - 1 , \qquad y = 2k + 1 , \qquad z = k^2 + k + 1$$

satisfont à l'équation $x^2 + xy + y^2 = z^2$; de là la solution de Diophante

$$2xz(z^2 - x^2) = 2zy(z^2 - y^2) = 2z(x+y)\left[(x+y)^2 - z^2\right] .$$

18° *Il est impossible de trouver deux triangles tels que les deux plus grands côtés diffèrent également de même que les plus petits.*

19° *Trouver un triangle dont l'hypoténuse soit un carré, ainsi que la somme de ses cathètes* (Fermat). Ces dernières étant $x = u^2 - v^2$ et $y = 2uv$, on pose $u = \lambda^2 - \mu^2$ et $v = 2\lambda\mu$. Il faut que $x + y = \lambda^4 + 4\lambda^3\mu - 6\lambda^2\mu^2 - 4\lambda\mu^3 + \mu^4$ soit un carré, qu'on supposera[2] égal à celui de $\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2$,

[1] On la voit, pour la première fois, dans S'Gravesande, *Math. univ. elem.* (Leyde, 1727).

[2] Ce procédé porte le nom de Fermat. Si $a = \alpha^2$, ou si $e = \varepsilon^2$, on résoudra $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = y^2$ en l'assimilant au carré de $\alpha + ux + vx^2$, ou de $u + vx + \varepsilon x^2$, et on disposera de $u$ et de $v$ de manière à obtenir une égalité de la forme $Ax = B$. Connaissant une solution $x = n$, on en aura une nouvelle en changeant $x$ en $x' + n$, et ainsi de suite. Euler a traité des cas analogues de l'équation $a + bx + cx^2 + dx^3 = y^2$.

ce qui donnera $\lambda = \frac{3\mu}{2}$ et $\mu = -119$, solution à rejeter. Posons, en conséquence, $\lambda = \frac{3\mu}{2} + \nu$, il viendra une expression en $\mu$ et $\nu$ qu'on assimilera au carré de $\mu^2 + 148\mu\nu - 4\nu^2$; on trouvera ainsi $\mu = 84$, $\nu = 1343$, $\lambda = 1469$, d'où

$$x = 4565486027761 \ , \qquad y = 1061652293352 \ .$$

Lagrange a montré que ces nombres sont bien les plus petits qui répondent à la question, ainsi que l'avait affirmé Fermat.

20° *Si* (x, y, z) *définit un triangle, les nombres* (2x + y + 2z, x + 2y + 2z, 2x + 2y + 3z) *en définissent un autre dont les cathètes diffèrent autant que celles du premier.* De là, le moyen de *trouver une série infinie de triangles dont les cathètes diffèrent de la même quantité* (Wilkinson). *Les séries ainsi obtenues, en partant de* 0, n, n, *et faisant varier* n, *donnent tous les triangles possibles* (Monck). Voir *M.*, 1906, p. 113.

21° En outre du triangle possédant un angle droit, on pourrait étudier le triangle possédant un angle de 60°. *La formule qui relie les côtés d'un tel triangle est* $x^2 - xy + y^2 = z^2$, *et les formules générales des côtés sont* :[1]

$$x = 3f^2 - g^2 - 2fg \ , \qquad y = 3f^2 - g^2 + 2fg \ , \qquad z = 3f^2 + g^2 \ .$$

**59.** *Si* (a, b, c; d) *désigne une solution de l'équation* $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ *donnant, en nombres entiers, les côtés et la diagonale d'un parallélipipède rectangle, l'expression*

$$(a + b + d \ , \quad a + c + d \ , \quad b + c + d \ ; \quad a + b + c + 2d)$$

*en désigne un autre dans le même cas* (Monck). De là une infinité de semblables solides, en partant de (1, 2, 2 ; 3)[2].

---

[1] Elles se tirent des formules de l'exercice 7, en remarquant que $(2z)^2 = (x + y)^2 + 3(x - y)^2$. Les triangles quelconques fournissent également d'intéressantes questions. Ainsi *considérons la série des triangles tels que les côtés de chacun soient les demi-sommes de ceux du précédent, ces triangles tendront vers le triangle équilatéral isopérimètre* (Mackay). Voir aussi *S. Œ.*, 1913, p. 182.

[2] On a étudié de même, à la suite d'Euler, le parallélipipède rectangle dont les côtés et les diagonales superficielles sont des nombres entiers, ainsi que le trièdre tri-rectangle à côtés entiers. Mais on ne connaît pas de solutions générales de ces deux problèmes.

**60.** 1° *Désignons par* $E\omega$ *la partie entière du nombre non entier* $\omega$, *on a :*

(α) $0 < \omega - E\omega < 1$ , (β) $-1 < E\omega - \omega < 0$

(γ) $E\omega < \omega < 1 + E\omega$ , (δ) $E(\omega \pm a) = E\omega \pm a$

(ε) $E(\omega + \omega') - E(\omega + \omega'') = E(\omega' - \omega'')$ (φ) $E(a - \omega) = a - 1 - E\omega$

2° *Entre* $\omega$ *et* $\omega'$ *il y a* $(E\omega - E\omega')$ *entiers.*

3° *Dans les* b *premiers entiers, il y a* $E\frac{b}{a}$ *multiples de* a.

4° *Le plus grand multiple de* a *inférieur à* b *est* $aE\frac{b}{a}$. On peut le désigner aussi par l'expression $b - R\frac{b}{a}$.

5° *Déterminer* x *tel que le quotient* q *de* a *divisé par* b *ne change pas quand on ajoute* x *à chacun de ces deux nombres.* On a

$$0 \leqq a + x + q(b + x) \leqq b + x$$

d'où deux limites de $x$.

6° *Si* $\omega - E\omega < \frac{1}{n}$, *on a :* $E(n\omega) = nE\omega$. On multiplie la relation donnée par $n$ et on lui ajoute, membre à membre, la relation (β) après qu'on y a changé $\omega$ en $n\omega$.

7° *On a :* $0 \leqq E(n\omega) - nE\omega < n$. On multiplie (α) par $n$ et on ajoute la transformée de (β) du n° précédent.

8° On a :

$$\frac{a}{E\omega} - \frac{a}{\omega} < \frac{a}{(E\omega)^2} \; ; \qquad \sqrt{\omega} - \sqrt{E\omega} < \frac{1}{2\sqrt{E\omega}} \; ;$$

$$E\omega + \sqrt{\omega - E\omega} - \omega < \frac{1}{4} \; ; \quad aE\omega - E(\omega\omega') - E[(a - \omega')\omega] = 0 \text{ ou } 1 \; ;$$

$$E\sqrt{a(a+1)} = E\sqrt{a(a+2)} = E\sqrt[3]{a(a+1)(\cdot+2)} = a \; ;$$

$$E\sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)} = a(a+3)\,^1 \; ;$$

$$E\sqrt[3]{a(a+1)\ldots(a+5)} = a^2 + 5a + 3 \; ; \qquad \text{(Goulard)}$$

$$E(e\sqrt[n]{n!}) = n + 1 \; . \qquad (\textit{Ens. Math.}, 1906, \text{ p. } 354)$$

9° *On a :* $E\frac{E\frac{a}{b}}{c} = E\frac{E\frac{a}{c}}{b} = E\frac{a}{bc}$. On fait $\omega = \frac{a}{b}$ dans (α) et

[1] On n'a ainsi d'ailleurs que des approximations assez grossières, car, augmentant de 1 la partie sous le radical, on obtient le carré de $a(a + 3)$.

on divise par $c$; on ajoute ensuite, membre à membre, avec la relation ($\beta$) où on a fait $\omega = \frac{a}{bc}$.

10° Faisons, dans la relation de 7°, $n = 2$, $\omega = \frac{a}{b}$, puis dans ($\beta$), $\omega = \frac{2a}{b}$, et additionnons ; on conclura que $\left(\mathrm{E}\frac{2a}{b} - 2\mathrm{E}\frac{a}{b}\right)$ *est égal à* 0 *ou à* 1, *selon que* $\mathrm{E}\frac{2a}{b}$ *est pair ou impair* (Catalan). Généraliser.

11° *Pour* $a < b$, *on a :*

$$\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\mathrm{E}\frac{cb}{a}\right) = c - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{E}\left[\frac{a}{b}\left(1 + \mathrm{E}\frac{cb}{a}\right)\right] = c\ .$$

Par exemple, pour la première relation, on fait d'abord dans ($\alpha$), $\omega = \frac{cb}{a}$ et on multiplie par $\frac{a}{b}$; puis $\omega = \frac{a}{b}\mathrm{E}\frac{cb}{a}$, et on additionne, membre à membre.

12° *Soit* $(3 + \sqrt{5})^n = a + b\sqrt{5}$, *on a :* $a = \mathrm{E}(b\sqrt{5}) + 1$. Voir Fitz-Patrick, op. cit. 569.

13° Voir *Ens. Math.*, 1910, pp. 458 et 472, plusieurs utilisations et figurations de la fonction $\mathrm{E}\omega$.

14° De la relation $\mathrm{E}(\omega + 1) = 1 + \mathrm{E}\omega$, on conclut que, quel que soit l'entier $n$, il y a un nombre non entier $\xi$ positif et plus petit que $n$, tel que $\omega + \frac{\xi}{n} = 1 + \mathrm{E}\omega$ ; ce qui donne $\xi = n\mathrm{E}\omega - n\omega + n$, d'où, à cause de ($\delta$)

$$\mathrm{E}\xi = n\mathrm{E}\omega - \mathrm{E}(n\omega) + n\ ;$$

à cause de 7°. On peut donc dire, avec Hermite, que *dans la suite*

$$\mathrm{E}\omega\ , \quad \mathrm{E}\left(\omega + \frac{1}{n}\right)\ , \quad \mathrm{E}\left(\omega + \frac{2}{n}\right)\ , \ \ldots$$

*chacun des* $(n\mathrm{E}\omega - \mathrm{E}(n\omega) + n)$ *premiers termes est égal au premier.*

15° *Soit* $\mathrm{E}\omega = a$, l'expression

$$\frac{\omega^n + C_{2n,2}\,\omega^{n-1}a^2 + C_{2n,4}\,\omega^{n-2}a^4 + \ldots}{C_{2n,1}\,\omega^{n-1}a + C_{2n,3}\,\omega^{n-2}a^3 + C_{2n,5}\,\omega^{n-3}a^5 + \ldots}$$

*tend vers la limite* $\sqrt{\omega}$, *à mesure que* n *augmente.*

16° *Le nombre de fois que le nombre premier* p *est facteur dans* n ! *s'exprime par*

$$\mathrm{E}\frac{n}{p} + \mathrm{E}\frac{n}{p^2} + \mathrm{E}\frac{n}{p^3} + \ldots \qquad \text{(Legendre)}$$

17° *Si* a $<$ b, *les* $\left(\mathrm{E}\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{E}\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}+1}} - \mathrm{a}\right)$ *premiers termes de la série*

$$\mathrm{E}\frac{b}{a+1}\,, \qquad \mathrm{E}\frac{b}{a+2}\,, \ldots$$

*sont égaux au premier* (Berger).

18° *Démontrer les relations suivantes* :

$$\mathrm{E}\frac{a+1}{2} + \mathrm{E}\frac{a+2}{4} + \mathrm{E}\frac{a+4}{8} + \ldots = a\,, \qquad \text{(Cesaro)}$$

$$\Sigma\mathrm{E}\frac{a-bx}{c} = \Sigma\mathrm{E}\frac{a-cx}{b} \text{ [1]} \qquad \text{(Hermite)}$$

$$\Sigma\mathrm{E}\frac{a+x}{2x} = \Sigma\mathrm{E}\frac{a}{2x-1}\,, \qquad \Sigma\mathrm{E}\frac{a-bx}{x} = \Sigma\mathrm{E}\frac{a}{b+x}\,, \qquad \text{(Cesaro)}$$

19° On pourra s'exercer sur d'autres fonctions analogues. Ainsi, appelons $\mathrm{I}(\omega) = \mathrm{E}(2\omega) - \mathrm{E}(\omega)$ l'expression de l'entier le plus voisin du nombre $\omega$, non entier ni moitié d'un entier ; on a :

$$\mathrm{I}\frac{\omega}{2} + \mathrm{I}\frac{\omega}{4} + \mathrm{I}\frac{\omega}{8} + \ldots = \mathrm{E}\omega\,. \qquad \text{(Cesaro)}$$

**61.** Soit $n$ un nombre non carré, et désignons respectivement par $a$, $b$, $c$, $d$, ... l'excès de $n$, de $na$, de $nb$, de $nc$, ... sur le plus grand carré inférieur au nombre considéré $n$, $na$, $nb$, $nc$, ... ; les nombres 1, $a$, $b$, $c$, $d$ forment une *suite de Brocard. Une telle suite est périodique, et le nombre des*

---

[1] Chacun des deux membres de cette égalité représente le nombre de solutions du problème figuré par la relation $cy + bz \leqq a$ (Cesaro).

*termes de la période est inférieur à* 4n. Soient en effet $k$ et $l$ deux termes successifs, et $kn = r^2 + s$; on a :

$$l = s \ , \qquad s \leqq 2r \ , \qquad 4kn = 4r^2 + 4s \geqq s^2 + 4s > s^2 \ ,$$

d'où $l^2 < 4nk$. Si $h$ désigne une certaine puissance de 2, on a :

$$l^2 < (4n)(2\sqrt{n})(\sqrt{2\sqrt{n}})(\sqrt[4]{2\sqrt{n}}) \ldots \sqrt[h]{a} < 16n^2 \sqrt[h]{a} \ , \qquad \text{d'où} \qquad l \leqq 4n \ .$$

**62.** Posons $k\pi = n\varphi$; *l'expression* $\dfrac{\sin(2n-1)\varphi + \sin\varphi}{2\sin\varphi}$ *a pour valeur* n *ou* 0, *selon que* k *est ou n'est pas multiple de* n (Libri).

*Les fonctions* $0^{0^x}0^{0^{a-x}}$ *et* $(1 - 0^{0^{-x}})(1 - 0^{0^{a-x}})$ *ont la valeur* 1 *pour* $0 \leqq x \leqq a$, *et la valeur* 0 *pour toute autre valeur de* x (Id.).

Libri tire de là de curieuses formules sur le nombre des solutions des congruences $ax - bx = c$ et $ax^2 - by^2 \equiv c$, sur la représentation des nombres premiers, la somme des nombres premiers compris entre deux limites données, la détermination d'un nombre premier supérieur à une limite donnée, enfin la somme des diviseurs de divers groupes de nombres. Ces formules n'ont du reste aucun intérêt pratique.