

COUPLE GYROSCOPIQUE

Autor(en): **Bouny, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16309>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Supposons, par exemple, que deux joueurs doivent jouer cent parties à pile ou face, l'enjeu étant Un franc par partie. Ils joueront ces cent parties puis continueront à jouer jusqu'à ce qu'ils soient quitte. Il y a une chance sur mille pour qu'ils ne soient pas quitte au bout de 4000000 parties. Dans les cas où ils ne sont pas quitte avant ce nombre de parties, l'écart moyen est 8000 francs.

Pour résumer, l'on peut dire qu'il existe une sorte de périodicité du hasard puisque l'écart qu'il produit au bout d'un certain temps arrive toujours à s'annihiler par la suite, mais la durée moyenne de cette sorte de périodicité est infinie.

COUPLE GYROSCOPIQUE¹

PAR

F. BOUNY (Mons).

Dans tous les traités de mécanique rationnelle on étudie avec plus ou moins de détail le mouvement d'un solide autour d'un point fixe. Il est rare cependant que l'on examine d'une façon spéciale le phénomène, pourtant si important au point de vue des applications techniques, dénommé par les ingénieurs : *effet gyroscopique*, *effet gyrostatique*, ou *couple gyroscopique*. On se borne généralement à faire une remarque rapide sur les propriétés en apparence paradoxales du gyroscope. Il ne faut donc pas s'étonner, comme le font certains auteurs², de l'ignorance de beaucoup d'ingénieurs à cet endroit. D'ailleurs ceux-ci sentant la nécessité de compléter

¹ Les communications postales avec la Belgique étant interrompues par suite de la guerre, il nous a été impossible de soumettre à M. Bouny l'épreuve de la présente Note. — *Réd.*

² BOUASSE. *Cours de mécanique*, p. 575 : « On ne saurait croire quelles absurdités se débitent sur le compte du gyroscope ».

Ed. W. BOGAERT. *L'effet gyrostatique et ses applications*, p. 75, note.

des connaissances insuffisantes, ont beaucoup écrit sur la question et il existe quantité d'articles ayant uniquement pour but d'expliquer l'effet gyroscopique.

L'étude d'une bibliographie de ce sujet ne manque pas d'intérêt pour le professeur de mécanique rationnelle. Elle lui indique d'abord qu'il a négligé l'examen approfondi d'un phénomène important et soulève ensuite une question qu'il me semble utile d'élucider. La plupart des écrits dont je rappelle l'existence ont en effet la prétention de donner une démonstration *élémentaire* de l'effet gyroscopique, le mot *élémentaire* signifiant que l'auteur ne s'appuie pas, tout au moins *directement* sur le théorème de Coriolis¹. Or, ce théorème constitue, au fond, la véritable base du phénomène qui nous occupe. Par conséquent, si ceux qui écrivent pour des ingénieurs ayant abandonné depuis quelque temps l'étude de la mécanique rationnelle, mettent tant de soins à éviter l'emploi de la notion d'accélération complémentaire c'est donc qu'ils considèrent que cette notion est vague et imprécise aux yeux de leurs lecteurs, ceux-ci n'en ayant vu, somme toute, que fort peu d'applications.

De ce qui précède semble résulter 1° que l'étude directe du couple gyroscopique mérite d'être traitée avec plus d'ampleur dans les cours de mécanique rationnelle; 2° que ceux-ci gagneraient, au point de vue de l'effet utile, à contenir plus d'applications du théorème de Coriolis. On ferait donc d'une pierre deux coups en présentant la théorie du couple gyroscopique sous son véritable jour.

Après avoir étudié le mouvement d'un solide autour d'un point fixe comme on le fait habituellement, puis la théorie des mouvements relatifs par la méthode de Coriolis, on pourrait introduire la notion de couple gyroscopique en résolvant le problème suivant, par exemple. Soit S un système indéformable animé d'un mouvement quelconque. A ce sys-

¹ HIRNE. *Théorie analytique élémentaire du gyroscope*. Annales de l'observatoire de Paris, 1868.

DUCHESNES. *Théorie expérimentale du gyroscope*. Revue universelle des Mines, 1897.

JOUFFRET. *Théorie élémentaire du mouvement du gyroscope, de la toupie et du projectile oblong*. Revue d'Artillerie, 1874.

CHAUZEL. *Effet gyroscopique*. Revue de mécanique, janvier 1912.

BOGAERT. Livre cité, pp. 36 et 37.

tème est invariablement lié l'axe AB d'un solide homogène de révolution S_1 ¹. Le solide S_1 est animé, par rapport à S , d'une rotation $\bar{\omega}_1$ autour de AB. Déterminer la résultante générale et le couple résultant des forces centrifuges composées correspondant aux différents points de S_1 .

La résolution de ce problème est d'ailleurs immédiate. Choisissons des axes mobiles rectangulaires liés à S , l'origine étant au centre de gravité G de S_1 et l'axe des z coïncidant avec AB. Les projections de la vitesse relative d'un point $M(x, y, z)$ de S_1 sont :

$$v_{rx} = -r_1 y \quad v_{ry} = r_1 x \quad v_{rz} = 0$$

où o, o, r_1 représentent les projections de $\bar{\omega}_1$ sur les axes.

Si $\bar{\omega}(p, q, r)$ est la rotation instantanée de S , les projections de la force centrifuge composée du point M , de masse m , ont comme expressions :

$$2rr_1 mx \quad 2rr_1 my \quad - 2r_1 m(px + qy)$$

d'où l'on tire pour les projections de la résultante de ces forces :

$$2rr_1 \Sigma mx = 0$$

$$2rr_1 \Sigma my = 0$$

$$- 2r_1 p \Sigma mx - 2r_1 q \Sigma my = 0 .$$

Ces forces fictives se ramènent par suite à un couple résultant dont le moment $\bar{\mu}$ a pour projections :

$$\mu_x = - 2pr_1 \Sigma mxy - 2qr_1 \Sigma m y^2 - 2rr_1 \Sigma mzy$$

$$\mu_y = 2rr_1 \Sigma mxz + 2pr_1 \Sigma mx^2 + 2qr_1 \Sigma mxy$$

$$\mu_z = 2rr_1 \Sigma mxy - 2rr_1 \Sigma mxy = 0$$

ou encore en représentant par :

$$I = \Sigma m(x^2 + y^2) = 2\Sigma mx^2 = 2\Sigma my^2$$

le moment d'inertie de S_1 par rapport à l'axe AB :

$$\mu_x = - I r_1 q \quad \mu_y = I r_1 p \quad \mu_z = 0 .$$

¹ Il suffit que l'ellipsoïde d'inertie de S_1 soit de révolution, il est inutile qu'il en soit ainsi pour S_1 lui-même.

Le moment du couple lui-même peut d'ailleurs se représenter par¹:

$$\bar{\mu} = IM\bar{\omega}_1\bar{\omega} \quad (1)$$

et sa grandeur est :

$$\mu = I\omega_1\omega \sin \theta$$

où θ est l'angle des deux rotations $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}_1$.

Le couple $\bar{\mu}$ est le couple gyroscopique développé. Il agit dans le plan des deux rotations $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}_1$, et tend à amener AB en coïncidence avec $\bar{\omega}$.

Le mouvement relatif de S_1 s'effectue sous l'action des forces réelles, des réactions d'inertie d'entraînement et des forces centrifuges composées. Celles-ci se ramènent au couple $\bar{\mu}$ agissant sur l'axe AB. Cet axe reste en repos relatif, par conséquent les actions que S exercent sur lui doivent, entre autre, équilibrer le couple $\bar{\mu}$. Ce couple disparaît lorsque la rotation relative $\bar{\omega}_1$ est nulle. Lorsque S_1 tourne autour de AB les actions exercées par S sur l'axe ne sont pas les mêmes que si $\bar{\omega}_1$ était égal à 0, même si dans les deux cas les conditions de sollicitation de S_1 sont les mêmes et les mouvements d'entraînement identiques. Dans le premier cas ces actions doivent équilibrer, en effet, en plus le couple gyroscopique.

D'après ce qui précède, ce que nous nommons *couple gyroscopique* est donc rigoureusement un couple, même si la rotation $\bar{\omega}_1$ est petite. Il « montre » la rotation relative $\bar{\omega}_1$ puisqu'il s'annule avec elle tandis que les actions provenant des réactions d'inertie d'entraînement sont indépendantes du mouvement relatif.

Si beaucoup d'auteurs trouvent que l'*effet gyrostatique* ne peut être assimilé à un couple que pour une très grande rotation relative c'est qu'ils comprennent sous le nom d'effet

¹ Nous employons ici le signe M (moment linéaire) de MASSAU qui correspond au produit vectoriel ou extérieur de deux vecteurs. Cf.

MASSAU. *Cours de mécanique de l'Université de Gand.*

A. DEMOULIN. *Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites.*

J. GUIOT. *Le calcul vectoriel et ses applications à la géométrie réglée.*

gyrostatique ce qui provient à la fois des forces centrifuges composées et des réactions d'inertie d'entraînement.

Après avoir établi les formules donnant le couple $\bar{\mu}$ il est aisé de montrer comment elles peuvent être employées à l'étude du mouvement d'un solide autour d'un point fixe dans le cas de Lagrange et de Poisson, à la détermination du mouvement d'un système portant des gyrostats, à l'explication de la boussole gyroscopique de Foucault et des différentes applications du gyroscope (appareil de Brenau, etc.).

Cette méthode suivie depuis plusieurs années à l'École des Mines du Hainaut, y donne toute satisfaction.

Pour que la théorie du couple gyroscopique ne paraisse pas aux futurs ingénieurs un simple résultat du calcul, mais une réalité sensible il nous a semblé utile de ne pas nous contenter de faire devant eux les expériences de cours classiques avec la balance de Fessel, le polytrope de Sire, etc. mais de faire mesurer ce couple.

A cet effet nous utilisons un appareil établi comme suit : Un moteur électrique M fait tourner, par un train d'engrenages, autour d'un axe vertical le support S sur lequel repose, par l'intermédiaire de couteaux C un second moteur M_1 dont l'axe de rotation est normal à l'alignement des couteaux. Le moteur M_1 peut osciller librement autour de l'axe horizontal déterminé par ceux-ci, il entraîne dans ce mouvement des leviers qui, suivant le sens du déplacement, soulèvent ou abaissent une tringle passant dans l'axe de l'arbre vertical creux entraînant le support S. Au bout de la tringle sous la table de l'appareil se trouve un plateau P sur lequel on peut placer des poids. Enfin on peut caler à l'extrémité de l'arbre du moteur M_1 un volant V ayant un grand moment d'inertie.

Le moteur M en tournant donne une rotation d'entraînement ω au support S. On équilibre le moteur M_1 et le volant, ceux-ci ne tournant pas, en plaçant des poids convenables sur le plateau suspendu sous l'appareil. L'équilibre obtenu, on lance dans M_1 un courant électrique. Le moteur se met à tourner, aux poids et aux forces centrifuges s'ajoutent maintenant un couple gyroscopique qui, suivant les sens des rotations soulève ou abaisse le plateau. On ajoute ou l'on re-

tranche alors des poids et l'on mesure ainsi, en tenant compte des bras de levier, le couple gyroscopique développé correspondant à la vitesse angulaire ω de l'ensemble et à une vitesse angulaire relative ω_1 du moteur M_1 . Ces vitesses se déterminent facilement, par exemple à l'aide de compte-tours tachymétriques à force centrifuge.

En faisant varier ω et ω_1 on vérifie que le couple qui est donné ici par :

$$C = I\omega\omega_1$$

puisque l'angle θ est égal à $\frac{\pi}{2}$, reste proportionnel au produit $\omega\omega_1$.

On peut évidemment, dans des exercices pratiques, utiliser cet appareil pour déterminer expérimentalement les moments d'inertie de solides de révolution. Il suffit de caler ces solides à l'extrémité de l'arbre de M_1 et de mesurer le couple produit. On a :

$$I = \frac{C}{\omega\omega_1} \quad (a)$$

Les résultats suivants ont été obtenus à l'aide de l'appareil que nous venons de décrire :

n	n_1	ω	ω_1	P	C	I
2100	970	0,241	101,4	1k,320	972×10^4	398×10^3
2100	1675	0,241	175	2k,320	1705×10^4	404×10^3
2100	2400	0,241	251	3k,320	2445×10^4	404×10^3
2875	1750	0,329	183	3k,320	2445×10^4	405×10^3
2875	2325	0,329	243	4k,320	3180×10^4	398×10^3

n = nombre de tours par minute du moteur M

n_1 = » » » » » » » M_1

ω = vitesse angulaire en radians par seconde du support S

ω_1 = » » » » » » » moteur M_1

P = poids en Kg qu'il a fallu retirer du plateau pour équilibrer le couple gyroscopique

C = mesure du couple gyroscopique en dynes centimètres résultant de la valeur de P

I = moment d'inertie en C. G. S. des pièces tournantes, déduit de la valeur de C par la formule (a).

Les valeurs des I devraient toutes être identiques, le volant n'ayant pas été changé au cours des expériences. La vérification se fait d'ailleurs fort bien puisque les nombres obtenus diffèrent de moins de 2 %.

Le volant utilisé était, dans les expériences précédentes, un cylindre de 220 mm. de diamètre, pesant 6,585 kg. Son moment d'inertie calculé directement est donc, en unités C. G. S.

$$I_c = \frac{Mr^2}{2} = \frac{6585 \times 121}{2} = 398 \times 10^3 .$$

Si l'on y ajoute le moment d'inertie de l'induit du moteur M_1 , soit 3000 environs, on obtient pour moment d'inertie des pièces tournantes :

$$I'_c = 401 \times 10^3 .$$

Il est clair que si le moment d'inertie est connu ainsi que la grandeur d'une des rotations, on peut se proposer de déterminer l'autre à l'aide de la mesure du couple gyroscopique.

Des expériences de ce genre, faites par l'étudiant, auront non seulement l'avantage d'attirer son attention sur les circonstances dans lesquelles naît le couple gyroscopique, mais elles serviront de prétexte à des calculs pratiques où la question d'unités joue un rôle important. L'expérience prouve que l'on ne fera jamais faire trop d'exercices de cette espèce.

Juin, 1914.