

SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Autor(en): **Fontené, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16316>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

nombre premier. En procédant comme dans l'exemple mentionné, nous trouverons ici :

$$x + x_1 = 6y, \quad xx_1 = 2140941 - y, \quad x - x_1 = 2\sqrt{(3y)^2 - (2140941 - y)}$$

ainsi que les deux limites :

$$y \gtrsim 487 \quad \text{et} \quad y \lesssim 305849.$$

On voit que les x et x_1 tous deux seront pairs ou tous deux impairs, mais on ne voit pas s'ils sont premiers entre eux ou non, et non plus (ainsi que dans l'exemple nommé) si la quantité y sera paire ou impaire. Dans l'expression de $x - x_1$ il faudrait donc remplacer y par tous les nombres entiers entre les deux limites. Il est clair que cela exige plus de travail que ne représentent les divisions du nombre donné par les 1094 nombres premiers qui sont plus petits que la racine 8779, du nombre proposé.

Copenhague, janvier 1914.

SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ¹

PAR

G. FONTENÉ (Paris)

Si l'on devait se borner, dans un rapport annuel, à ce qui peut être nouveau, on risquerait de paraître trop bref. Il faut donc se résigner à répéter des choses déjà dites ; et, si l'on veut essayer d'être utile, on doit, tout en continuant à louer ce qui est bien, insister sur les points qui laissent encore à désirer.

Or, il n'est pas douteux que l'esprit géométrique est en baisse ; et c'est grand dommage. Dans l'éloge académique qu'il a consacré à Joseph Bertrand, M. Darboux s'exprime ainsi : « Bertrand a tou-

¹ Rapport présenté au Conseil Académique de Paris, en juin 1914, par M. G. Fontené, inspecteur d'Académie.

Tous ceux qui ont suivi, de près ou de loin, les travaux de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique (Paris, 1-4 avril 1914) liront avec intérêt ce rapport, rédigé au lendemain du Congrès, et dans lequel l'auteur revient à plusieurs reprises sur les séances du Congrès. Nous remercions M. G. Fontené d'avoir bien voulu nous autoriser à reproduire son rapport. — *La Réd.*

jours montré pour la géométrie une préférence toute particulière qui s'explique par la nature de son esprit, désireux par-dessus tout de ne perdre de vue, à aucun moment, l'objet de sa recherche. » C'est en effet le propre des méthodes géométriques de maintenir l'esprit en contact avec les données du problème, de permettre à chaque instant une compréhension exacte des résultats obtenus, de rendre impossible, ou tout au moins difficile, une erreur grave de raisonnement, par suite du contrôle expérimental fourni par la figure. Poincaré, qui donna pour la rotation des corps, en l'absence de forces appliquées, une théorie géométrique d'une rare élégance, disait finement : « Sitôt qu'un auteur ingénieux a su parvenir à quelque vérité nouvelle, n'est-il pas à craindre que le calculateur le plus stérile ne s'empresse d'aller vite la rechercher dans ses formules, de la découvrir une seconde fois, et à sa manière, qu'il dit être la bonne ; de telle sorte qu'on ne s'en croit plus redevable qu'à son analyse, et que l'auteur lui-même, quelquefois peu exercé, ou même étranger à ce langage et à ces symboles sous lesquels on lui dérobe ses idées, ose à peine réclamer ce qui lui appartient, et se retire presque confus, comme s'il avait mal inventé ce qu'il a si bien découvert ? » Au surplus et sans méconnaître le moins du monde la puissance de l'analyse, en accordant, ce qui n'est pas douteux, que pour un certain nombre d'esprits, pour le plus grand nombre peut-être, la découverte par le calcul est plus assurée que la découverte par le raisonnement géométrique, il reste que l'habitude de ce mode de raisonnement permet seule d'apercevoir les propriétés concrètes qui se cachent sous les formules de l'analyse, de s'y intéresser, de les regarder comme le but et le dernier mot de la recherche.

On dirait volontier de la géométrie et de l'algèbre ce que l'ingénieur en chef de la marine M. Marbec disait récemment de la théorie et de la pratique : discuter, comme on le fait trop souvent, en les opposant l'une à l'autre, comme si l'on devait être fatalement privé de l'une ou de l'autre, c'est en somme discuter sur les inconvénients comparés de deux infirmités ; soyons des gens bien portants.

Il serait donc très désirable que l'esprit géométrique fût en honneur dans les classes de l'enseignement secondaire. Il n'en est malheureusement rien. Sauf de trop rares exceptions, partout où l'on va, on trouve de l'algèbre et toujours de l'algèbre. La faute en est un peu aux programmes, beaucoup plus aux habitudes des examens ; la faute en est surtout aux préoccupations utilitaires que les nécessités de la lutte pour la vie ont imposées à la pensée moderne. Cette pensée est pragmatiste, et, comme on l'a dit, « l'idée centrale — fort simple — du pragmatisme est celle-ci : les sciences se sont constituées comme des instruments pour l'action, la connaissance n'a de valeur que par rapport à l'action qu'elle

sert; on retiendra ce qui est utile pour l'action, on rejettera ce qui ne l'est pas. » Mais, même en acceptant ce point de vue, même en faisant bon marché de tendances qui sont, aux yeux de quelques-uns, l'honneur de l'humanité, et dont l'abandon ne va pas sans une diminution de valeur morale, on se trompe si l'on croit qu'un esprit incapable de raisonner sans les symboles de l'algèbre est capable de résoudre les difficultés que rencontre, par exemple, un ingénieur. Au congrès de l'enseignement mathématique qui a eu lieu pendant les vacances de Pâques, et dans la discussion du rapport de M. Stæckel réclamant une forte éducation mathématique pour les ingénieurs, tout au moins pour l'élite, M. Kœnigs et M. Marbec ont été d'accord pour déclarer qu'une étude sérieuse de la géométrie est indispensable à quiconque veut faire de la mécanique d'une façon sérieuse et pour regretter le déclin des études géométriques; M. Marbec avait d'ailleurs insisté, dans une conférence faite le 22 mai 1913 aux élèves de l'École polytechnique, sur le rôle utile des recherches de géométrie faites sans visée immédiate d'application pratique. Tel est aussi le sentiment de M. Maurice d'Ocagne, le sentiment d'un très grand nombre d'ingénieurs.

On ne saurait donc trop remercier les professeurs de l'enseignement secondaire qui, en dépit de la mode, maintiennent dans leurs classes le culte d'une science dont le moins qu'on puisse dire est que sa valeur éducative est incomparable.

Voici autre chose, mais en somme dans le même ordre d'idées. Au congrès de philosophie mathématique qui a suivi le congrès de l'enseignement, et dont les séances ont été fort intéressantes, M. Couturat a demandé quel était le rôle de l'intuition dans l'enseignement des mathématiques. J'ai répondu à cette question, et je demande la permission de reproduire ici cette réponse :

« M. Couturat demande si, oui ou non, l'intuition joue actuellement un rôle excessif dans l'enseignement des mathématiques en France; plutôt à Dieu qu'il fût possible de lui dire qu'elle y joue un rôle suffisant!

« Il faut d'abord distinguer. Dans le premier cycle, l'enseignement est assez concret: on fonde les notions et les opérations relatives aux nombres sur la considération des grandeurs (et j'observe en passant que l'on parle encore de nombres concrets et de nombres abstraits, alors qu'il faudrait parler de grandeurs et de nombres); on rattache la géométrie à des faits d'expérience, on montre les choses avant de démontrer les théorèmes; mais on ne se contente pas de constater, on raisonne; on demande à l'intuition de mettre les esprits en état de comprendre les objets de la déduction; on éveille la curiosité, pour la satisfaire ensuite.

« Dans le second cycle, l'enseignement prend un aspect plus dogmatique et devient alors parfaitement rigoureux. Un bon élève sait fort bien qu'il doit démontrer l'existence des parallèles avant

d'en parler; qu'il doit construire un quadrilatère ayant ses côtés opposés égaux, deux à deux, et non le supposer tracé, pour démontrer qu'il a affaire à un parallélogramme, et, de deux énoncés dans le V^e livre de géométrie, il choisit volontier celui dont l'hypothèse est réalisable. Il ne confondra pas une fraction dont les termes sont premiers entre eux et une fraction qu'il est impossible de simplifier, avant d'avoir démontré l'équivalence des deux faits. Un élève, même moyen, ne supprime pas un facteur commun sans se demander s'il est différent de zéro; un bon élève a un sens très vif de l'équivalence en algèbre.

« Nos élèves de mathématiques spéciales, formés par des maîtres éminents, ont un souci de la rigueur qui, autrefois, aurait passé pour excessif; et l'on peut dire que les meilleurs accordent à la notion de coupure toute sa valeur.

« S'il faut dire toute ma pensée, je crois même que dans les hautes classes on ne fait pas à l'intuition sa part légitime. Un élève de mathématiques spéciales raisonnera, par exemple, sur les surfaces développables sans avoir aucune idée de leur forme au voisinage de l'arête de rebroussement, alors qu'il lui suffirait de tracer en trait plein les demi-tangentes positives, en pointillé les demi-tangentes négatives, pour avoir à ce sujet une impression physique nullement négligeable. Le théorème des fonctions composées, dans le cas d'une fonction z de deux fonctions u et v d'une variable x , n'est pas autre chose que l'existence du plan tangent à la surface représentée en coordonnées cartésiennes par l'équation $z = f(u, v)$, avec un axe des u , un axe des v , un axe des z ; on pourrait en donner ainsi une idée première, et, dans la démonstration qu'il faut organiser ensuite, on suivrait utilement sur une figure les faits analytiques; il y a là une courbe tracée sur une surface, et l'équivalent analytique de ce fait géométrique échappe certainement à beaucoup d'élèves.

« Je crois donc pouvoir rassurer ceux qui craignent de voir l'enseignement en France évoluer vers l'empirisme; nous sommes une nation de raisonneurs, et il faut souhaiter que nous consentions davantage à voir de nos yeux et à toucher de nos mains les objets de nos raisonnements. »

A dire vrai, j'ai peut-être été un peu loin. Un grand nombre d'excellents maîtres font de louables efforts pour réagir contre leur tendance instinctive et celle de leurs élèves à raisonner en abstrait; et il faut souhaiter seulement que ceux qui font ainsi soient le plus grand nombre.

Au congrès de l'enseignement mathématique dont j'ai parlé plus haut, outre la question de la formation des ingénieurs, on a traité la question des « résultats obtenus par l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement secondaire ». Le rapporteur général, M. Beke (pro-

fesseur à Budapest), a résumé les rapports qui lui avaient été envoyés par les délégués des pays participants, par M. Bioche pour la France. « En France, écrit M. Beke, depuis douze ans déjà, dans l'enseignement secondaire, des éléments du calcul différentiel et, en partie, de ceux du calcul intégral ont pénétré dans les institutions. Nous pouvons dire avec Faust que *là au commencement fut l'action*. J'ai accompli un devoir agréable en rendant hommage aux esprits dirigeants de cette grande nation qui, tant dans le passé que dans le présent, ont pris une part active, par la parole et par l'exemple, à la rénovation de l'enseignement mathématique. » J'ai cité ces paroles parce qu'elles sont pour nous un encouragement à continuer la tâche entreprise, à améliorer ce qui est bon, à corriger ce qui peut être encore défectueux.

Au cours de la discussion, j'ai été amené à prendre la parole. J'ai dit, d'accord en cela avec M. Bioche, que l'introduction dans l'enseignement de la notion de fonction était une chose heureuse, que l'emploi de la dérivée était définitivement acquis, que personne ne songeait à revenir là-dessus. J'ai ajouté que ce n'était pas une raison pour mettre des dérivées partout ; qu'il fallait, là encore, se préoccuper avant tout de faire réfléchir les élèves. J'ai demandé que l'on voulût bien étudier directement la fonction homographique, le trinôme du second degré, le trinôme bicarré¹. Et j'aurais pu rappeler à M. Darboux, qui goûtait peu ma manière de voir, ce qu'il dit de J. Bertrand dans ce même éloge dont j'ai déjà cité un passage : « Il n'appréciait pas outre mesure les méthodes générales et les comparait spirituellement à ces grandes routes que l'ingénieur a tracées d'un point à un autre, sans se préoccuper ni de la beauté des sites, ni de la situation de la contrée qu'elles traversent. » Je suis tout à fait d'avis qu'il y a lieu d'étudier par la dérivée le quotient de deux trinômes du second degré (encore que la méthode qui ramène cette étude à celle de la fonction simple $x + \frac{R}{x}$ soit bien intéressante). On m'accordera que l'étude, aujourd'hui disparue, des conditions dans lesquelles le produit $x^m y^n z^p$ atteint son maximum, la somme $x + y + z$ étant constante, *et les variables étant positives*, était éminemment propre à développer chez les élèves la faculté de raisonnement ; elle leur donnait un exemple de maximum pour une fonction de plusieurs variables indépendantes, soumises à des restrictions ; et la simplicité des moyens employés ajoutait à l'intérêt de la question.

Puisque je parle de calcul différentiel et intégral, en dehors des

¹ Les résistances que l'on rencontre dans quelques pays étrangers à l'introduction du calcul différentiel dans l'enseignement secondaire, résistances qui sont parfois offertes par des maîtres jeunes, tiennent en partie à ce que le progrès souhaité n'est pas réalisé en deux étapes : idée de fonction d'abord, notion de la dérivée ensuite.

classes de Mathématiques spéciales, je ferai une remarque que je crois utile. Dans la classe de Mathématiques (ancienne classe de Mathématiques élémentaires), on démontre que, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, la dérivée de l'aire est l'ordonnée, de sorte que l'aire est exprimée par la fonction primitive de la fonction qui exprime l'ordonnée ; on pourrait montrer alors que l'intégrale définie est une somme, et justifier le signe \int . J'observe à ce propos qu'il est bon d'écrire, à ce point de vue,

$$\int_a^x f(x) dx, \quad \text{ou} \quad \int_a^x f(\xi) d\xi.$$

Une question toujours douloureuse est celle de l'enseignement des mathématiques dans les classes de lettres. L'Association des Professeurs de mathématiques, dont la compétence et la bonne volonté sont également indiscutables, donne sur ce sujet des renseignements faits pour inquiéter : On déplore la faiblesse excessive des élèves en cette matière, on souhaite vivement qu'une épreuve écrite de mathématiques soit introduite à la première partie du baccalauréat littéraire. Et je me souviens que, dans le rapport qu'il fit autrefois sur l'enseignement des sciences en Allemagne, M. Marotte écrivait : « Tout élève de gymnase, insuffisant en sciences, échoue aux examens de passage et aux examens terminaux, comme s'il était insuffisant en latin ou en grec. » Dans la déposition de l'Association sur la réforme de 1902, on lit ceci : « Les élèves qui entrent dans les sections A et B, sauf exception, ont peu de goût et peu d'aptitude pour les études mathématiques. Depuis longtemps, des conférences facultatives de mathématiques sont offertes aux élèves de Première A et B ; dans ces conférences dépourvues de toute sanction, le professeur est libre de diriger son enseignement dans le sens qui lui paraît devoir être le plus profitable à ses élèves. Néanmoins, cet enseignement complémentaire n'a donné que des résultats insignifiants. Peut-être conviendrait-il de commencer ces conférences au début du 2^e cycle. » Je dois dire que, à Paris, la conférence donne quelques résultats. Des élèves de Première A, ayant le baccalauréat latin-grec, sont entrés en Mathématiques et suivent dans d'excellentes conditions : sur 4 élèves d'une classe de Mathématiques, signalés l'an dernier comme venant de Première A ou de Philosophie, 2 sont entrés en Mathématiques spéciales, 2 au cours préparatoire à l'École centrale : ils sont parmi les meilleurs élèves de ces deux classes ; cette année même, on trouve dans les sections A et B du second cycle de très bons élèves qui entreront dans la classe de Mathématiques, soit après la Première, soit après la Philosophie.

Voici quelques remarques relatives à des points de détail. Dans

les petites classes, on n'a pas assez l'habitude d'écrire la division par une égalité entre le dividende, le diviseur, le quotient et le reste, égalité suivie d'une inégalité¹. Et, quand on a acquis par les fractions la notion d'un quotient exact, on a tort de confondre le signe de la division et la barre des fractions ; comment veut-on qu'un élève comprenne qu'il y a lieu de démontrer que le quotient de 5 par 7 est la fraction $\frac{5}{7}$ si l'on écrit immédiatement $\frac{5}{7}$ et non $5 : 7$? Il faut écrire

$$5 : 7 = (1 \times 5) : 7 :$$

$$\frac{5}{7} = (1 : 7) \times 5 ;$$

et dire au moins, si on ne le démontre pas, qu'on est en droit de changer l'ordre des deux opérations qui interviennent.

Après avoir donné aux enfants *l'expression* de l'intérêt, $R \times A \times T$, il faut leur donner *la formule* de l'intérêt,

$$I = R \times A \times T .$$

et les habituer à déduire de cette formule unique la solution des trois problèmes inverses. J'ajoute que, pour établir l'expression $R \times A \times T$, il est tout à fait inutile de faire appel à cette chose un peu vétuste qu'on appelle la règle de trois ; il n'y a qu'à s'appuyer sur une définition : multiplier par $\frac{2}{3}$ c'est prendre les deux tiers². On définit parfois autrement la multiplication par une fraction, et ce que l'on dit alors est parfaitement incompréhensible : si l'on dit que tel nombre est composé avec tel autre, il faut indiquer le mode de composition, addition, multiplication ou tout autre, si bien que la définition en question comporte un cercle vicieux.

Plusieurs rapports signalent une tendance à revenir aux anciennes méthodes pour le premier enseignement de la géométrie. On croit avoir constaté que les élèves ont des idées moins fermes, moins assurées, quand ils invoquent à tout propos la notion du mouvement que quand ils s'appuient, par exemple, sur les cas

¹ Je rappelle que l'expression *quotient entier* peut être employée avec avantage ; le quotient entier devient plus tard la partie entière du quotient exact. On dit de même la *racine entière* ; mais cette racine ne devient pas aussi aisément la partie entière d'une racine exacte, celle-ci n'étant donnée que par la notion de coupure.

² De même quand on cherche, comme il arrive si souvent, un nombre dont les deux tiers soient A, on doit dire : le nombre cherché multiplié par $\frac{2}{3}$ doit donner A, ce nombre est le quotient de A par $\frac{2}{3}$, ou $A \times \frac{3}{2}$; la vérification est d'ailleurs immédiate : les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{2}$ de A sont A.

d'égalité des triangles. C'est une observation que j'ai eu moi-même l'occasion de faire.

On se félicite en général d'avoir confié le dessin en Seconde C et D au professeur de mathématiques, lorsque la chose a été possible ; réfléchir, même en dessinant, n'est pas chose à dédaigner.

Je lis dans un rapport : « Les têtes de classe se valent dans les sections C et D ; il y a seulement plus d'élèves médiocres en D qu'en C. Dans la classe actuelle de Mathématiques, parmi les 4 élèves qui se classent les premiers en mathématiques, avec une supériorité marquée sur leurs camarades, 3 sortent de la section D. L'élève reçu 27^e à l'École polytechnique est un ancien élève de D ; il ne bénéficiait d'aucun point de majoration. » Si partisan que l'on puisse être de la culture latine, il n'est que juste de constater à l'occasion qu'elle n'est pas indispensable.

Le nouvel horaire établi par l'arrêté du 27 novembre 1912 fonctionne aujourd'hui dans toutes les classes : le temps consacré aux mathématiques a été quelque peu réduit. Dans la classe de Mathématiques, il n'y a plus qu'une heure pour le dessin géométrique, mais le programme ajoute : on pourra donner deux heures ; cette seconde heure pourrait être confiée au professeur de mathématiques, sous la condition d'être employée à des tracés d'épures.

Des modifications assez faibles ont été faites au programme des connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique. Je relève avec plaisir la phrase suivante : en ce qui concerne la géométrie analytique, les professeurs s'attacheront à développer chez les élèves l'esprit géométrique et, par exemple, à indiquer ou à provoquer, lorsque l'occasion leur en sera offerte, la solution géométrique simple des questions traitées, parallèlement à leur solution analytique.

Par contre, le programme relatif à la seconde partie du certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles comporte une part d'algèbre que je ne puis m'empêcher de trouver excessive. La théorie des quantités complexes est-elle bien à sa place dans ce programme ? Et n'eût-il pas été préférable d'y faire figurer la théorie des équations, ou une partie élémentaire de mécanique ?

En terminant, qu'on me permette de citer un passage de la préface écrite par M. Borel pour un ouvrage d'enseignement récemment paru : « Votre livre est un très bel échantillon de ce que peuvent donner les programmes actuels entre les mains de professeurs distingués et dévoués. Ces professeurs sont légion dans notre enseignement secondaire, tant dans les lycées des départements que dans ceux de Paris ; les professeurs de mathématiques spéciales, en particulier, donnent avec une rare distinction un enseignement très élevé. Votre livre est un témoignage éclatant de la valeur que peut atteindre cet enseignement dans

nos lycées des départements ; ce témoignage n'était pas nécessaire à ceux qui connaissent vos élèves pour les avoir interrogés aux examens d'entrée des écoles, mais, à une époque où les enquêtes et les comparaisons internationales sont à la mode, il n'était pas superflu de rappeler que, par le niveau des études mathématiques, un grand nombre de nos lycées (qui ne sont pas tous dans des villes d'Universités) doivent être mis sur le même plan que bien des Universités étrangères, où les matières que vous enseignez font généralement partie des programmes des premières années. » A ce juste hommage rendu par M. Borel à des maîtres éminents, il convient d'ajouter que leur tâche serait impossible sans le talent et le dévouement des maîtres qui, prenant pour ainsi dire les élèves par la main lors de leur entrée au lycée, les conduisent, sans jamais se laisser rebuter par leurs défaillances, au seuil de ces classes vers lesquelles se tournaient leurs regards dès leurs jeunes années.

LA TRIGONOMÉTRIE DANS SES RAPPORTS AVEC LA GÉOMÉTRIE

PAR

Arnold STREIT (Berne).

I. — Introduction.

Dans la présente étude, nous donnerons d'abord une nouvelle démonstration des formules de $\sin(\alpha \pm \beta)$ et $\cos(\alpha \pm \beta)$ basée sur un théorème de géométrie et son corollaire. Puis nous appliquerons ces formules, celles qui en découlent et d'autres formules de *trigonométrie* à la *géométrie*, ce qui nous permettra de retrouver les relations de théorèmes importants de géométrie, entre autres celles des théorèmes de *Pythagore*, de *Pythagore généralisé*, de *Céva*, de *Ménélaüs*, de *Ptolémée* et d'établir des théorèmes nouveaux.

Notations. — Nous désignerons les sommets d'un triangle par A, B, C ; les côtés opposés respectivement par a, b, c ; les hauteurs correspondantes par h', h'', h''' et les angles par α, β, γ .