

III. — Vecteurs-glisseurs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

on obtient

$$q = x_1 + iy_1 + jx_2 + jy_2$$

ou

$$q = x_1 + iy_1 + j(x_2 + iy_2)$$

ou enfin

$$q = z_1 + jz_2$$

z_1 et z_2 étant deux nombres complexes binaires.

En résumé : Un vecteur-quaternion est un quaternion dont l'angle est droit. C'est un vecteur axial et glissant.

Toute l'analyse vectorielle repose sur la confusion entre les vecteurs géométriques et les vecteurs-quaternions homologues ; confusion dont j'ai démontré la légitimité dans mon *Arithmétique générale*.

III. — Vecteurs-glisseurs.

Les notations $\overline{AB}$ et AB sont les notations classiques d'un vecteur géométrique d'origine A et d'extrémité B. Hamilton et Grassmann ont employé les notations $A - B$ et $B - A$. Cette dernière, où l'on a voulu voir une abréviation de $OB - OA$, semble actuellement réunir les préférences des mathématiciens. On reproche à AB sa forme qui rappelle celle des produits. Il me paraît que ce reproche est puéril. Lorsque j'écris une formule et que je la transforme par le calcul, je n'agis pas comme une mécanique inconsciente : il ne m'arrivera jamais de prendre AB , qui au début aurait représenté un vecteur ou sa mesure, pour un produit de A par B. Il faut évidemment savoir de quoi l'on parle, et par exemple n'user de la propriété commutative des produits que lorsqu'il ne s'agit pas de facteurs quaternions.

Quoi qu'il en soit, le fait d'avoir vu représenter un vecteur $\overline{AB}$ par la notation $B - A$ m'a amené à considérer un vecteur comme un transporteur de points. Cette conception donne naissance à une nouvelle espèce de vecteurs, opérateurs ou nombres, tout à fait distincts des vecteurs-géométriques et

des vecteurs-quaternions, et représentables, à titre de rapports de points, par des symboles tels que

$$\frac{B}{A}.$$

Après réflexions j'ai reconnu que pour pouvoir étendre le champ d'application de ces nouveaux vecteurs, il serait bon d'affecter les points A et B de nombres, ou masses, comme a fait Möbius dans son calcul des barynombres.

Point-masse. — Appelons *point-masse* l'association d'un point géométrique A et d'un nombre ou masse m (nombre positif ou négatif), et désignons provisoirement ce point-masse par la notation (A, m) .

Multiplier (A, m) par un nombre n sera, par définition, considérer le point-masse (A, mn) :

$$(A, m) \times n = (A, m \cdot n).$$

Désignons par A le point-masse unité $(A, 1)$; on aura

$$(A, m) = (A, 1) \times m = A \cdot m.$$

On écrira mA au lieu de Am si m est entier ou fractionnaire. De là résulte la loi associative :

$$Am \times n = A \times mn.$$

Définition. — J'appelle *vecteur-glisseur* toute loi de formation d'un point-masse à l'aide d'un autre.

Si l'on considère par exemple les points-masses Am et Bn , portés par un axe u et tels que $\overline{AB} = \bar{u} \cdot d$ pour former Bn à l'aide de Am , il suffit de multiplier d'abord Am par le nombre $h = \frac{n}{m}$ ce qui donne An ; puis on fait glisser An de A en B , lui faisant ainsi parcourir le vecteur-géométrique $\overline{AB} = \bar{u} \cdot d = \bar{\alpha}$. Ce vecteur-géométrique $\bar{u}d$ a pour homologue un vecteur-quaternion ud qu'on peut lui substituer dans les raisonnements et les calculs, ainsi qu'il a été dit à propos des vecteurs-quaternions.

Désignons le vecteur-glisseur ainsi défini par la notation

$$G(h, \alpha)$$

et soit $g(\alpha)$ le nombre chargé uniquement du glissement ; appelons-le *glisseur*. Donnons à Bn le nom de *produit* de Am par le vecteur-glisseur $G(h, \alpha)$.

Nous aurons

$$Bn = Am \times G(h, \alpha) = [(Am)h] g(\alpha) .$$

De cette relation résulte, en vertu de ma définition générale du produit de deux nombres :

$$G(h, \alpha) = h . g(\alpha) .$$

Je démontre que le glisseur $g(\alpha)$ analogue au verseur d'un quaternion, est une fonction exponentielle de α , et que l'on a aussi

$$g(\alpha) = 1 + \omega . \alpha$$

ω étant une constante dont le carré est 0. Ceci entraîne

$$g(\alpha) = e^{\omega \alpha}$$

et

$$G(h, \alpha) = h e^{\omega . \alpha} = h e^{\omega . ud} .$$

On marquera peut-être quelque étonnement au sujet de la constante ω , dont le carré et les puissances supérieures sont nuls. En appliquant la théorie des glisseurs aux vecteurs géométriques glissants, dont les axes sont parallèles, on arrive à constater que ω est un nombre, loi de formation à l'aide d'un vecteur libre, d'un couple de vecteurs glissants, dont ce vecteur libre est le *moment*.

Autrement dit, $\bar{\alpha}$ étant un vecteur géométrique libre, on a

$$\bar{\alpha} . \omega = \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 .$$

$\bar{\beta}_1$ et $\bar{\beta}_2$ étant les deux éléments d'un couple dont $\bar{\alpha}$ est le moment.

Si nous multiplions $\bar{\alpha} . \omega$ par ω nous obtenons

$$\bar{\alpha} . \omega^2 = \bar{\beta}_1 . \omega + \bar{\beta}_2 . \omega .$$

$\bar{\beta}_1 . \omega$ et $\bar{\beta}_2 . \omega$ sont deux couples ayant pour moments respectifs les vecteurs $\bar{\beta}_1$ et $\bar{\beta}_2$ dont la résultante est nulle. Il en

résulte

$$\bar{\beta}_1 \cdot \omega + \bar{\beta}_2 \cdot \omega = 0$$

ou

$$\bar{\alpha} \cdot \omega^2 = 0.$$

Et par suite

$$\omega^2 = 0.$$

Remarque. — Le moment d'un couple de vecteurs glissants polaires est un vecteur libre axial.

IV. — Conclusion.

Telles sont les définitions des trois espèces de vecteurs que j'ai signalées au début de cet article. Je les ai exposées avec quelques détails, afin d'être aussi clair que possible, et afin de mettre bien en évidence les différences fondamentales qui les distinguent. Il importe en effet de réagir contre les coupables confusions où semblent se complaire les fervents de l'analyse vectorielle. En obscurcissant à plaisir semble-t-il les principes fondamentaux de cette belle science, les géomètres modernes l'ont enveloppée d'une ombre mystérieuse où le débutant manque de trébucher à chaque pas.

Comment comprendre en effet qu'il y ait deux produits différents de vecteurs géométriques ? un produit scalaire et un produit vectoriel, le premier étant un nombre et le second un vecteur. Et l'homogénéité, qu'en fait-on ?

En réalité, il n'y a pas de produit de deux vecteurs géométriques ; cette locution n'a aucun sens ¹.

1° On peut multiplier un vecteur géométrique par un vecteur-quaternion dont l'axe lui est perpendiculaire, ou par un vecteur-glisseur dont l'axe lui est également perpendiculaire.

2° Le produit de deux vecteurs-quaternions, d'un vecteur-quaternion par un vecteur-glisseur, d'un vecteur-glisseur par un vecteur-quaternion, et de deux vecteurs-glisseurs sont des nombres, répondant à la définition générale et uni-

¹ Je sais bien qu'on lui en donne un par définition, mais c'est la raison d'être de cette définition que je ne puis accepter.