SUR LE TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Autor(en): **Suchar, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16313

SUR LE TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

PAR

M. Paul SUCHAR (Pau).

1. — On sait que M. GÉRARD a ramené à trois les cinq conditions de M. Girod, pour exprimer que deux nombres α, β, comprennent entre eux les racines d'une équation du second degré.

Je me propose d'abord de retrouver différemment ces mêmes conditions, j'indique ensuite une méthode me permettant de résoudre à la fois le problème du classement des racines d'une équation du second degré par rapport à deux nombres donnés ou bien par rapport aux racines d'une autre équation du second degré.

2. — Soient,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

l'équation donnée et α, β $(\alpha < \beta)$, les deux nombres donnés, x' et x'', les racines de l'équation (1) ; nous aurons le classement particulier,

$$\alpha\ ,\ x',\ x'',\ \beta\ ,$$

si on a les conditions ;

$$\Delta > 0\ , \quad x' - \alpha > 0\ , \quad \beta - x' > 0\ , \quad x'' - \alpha > 0\ , \quad \beta - x'' > 0\ ,$$

où Δ est le discriminant de l'équation (1). Remarquons que les quatre dernières conditions sont équivalentes aux deux suivantes :

$$\frac{x' - \alpha}{\beta - x'} > 0 \qquad \frac{x'' - \alpha}{\beta - x''} > 0\ ,$$

ou aux deux autres ;

$$(x' - \alpha)(\beta - x') > 0 \qquad (x'' - \alpha)(\beta - x'') > 0\ ;$$

donc les cinq conditions précédentes sont équivalentes aux trois conditions :

$$(u) \qquad \Delta > 0 \qquad \frac{x' - \alpha}{\beta - x'} > 0 \qquad \frac{x'' - \alpha}{\beta - x''} > 0 \ ,$$

ou

$$(v) \qquad \Delta > 0 \qquad (x' - \alpha)(\beta - x') > 0 \qquad (x'' - \alpha)(\beta - x'') > 0 \ ,$$

ces conditions étant évidemment nécessaires et suffisantes. Ces deux systèmes peuvent d'ailleurs être remplacés par les suivants, équivalents et symétriques par rapport aux racines x' et x'' ;

$$(u') \qquad \Delta > 0 \qquad \frac{x' - \alpha}{\beta - x'} \cdot \frac{x'' - \alpha}{\beta - x''} > 0 \ , \qquad \frac{x' - \alpha}{\beta - x'} + \frac{x'' - \alpha}{\beta - x''} > 0$$

ou

$$(v') \qquad \Delta > 0 \qquad (x' - \alpha)(\beta - x')(x'' - \alpha)(\beta - x'') > 0 \ ;$$

$$(x' - \alpha)(\beta - x') + (x'' - \alpha)(\beta - x'') > 0 \ ,$$

or on a,

$$\frac{x' - \alpha}{\beta - x'} + \frac{x'' - \alpha}{\beta - x''} = - \frac{2c + b(\alpha + \beta) + 2a\alpha\beta}{f(\beta)}$$

et

$$\frac{x' - \alpha}{\beta - x'} \cdot \frac{x'' - \alpha}{\beta - x''} = \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \ ,$$

et le système (u') est donc,

$$(u'') \qquad \Delta > 0 \qquad f(\alpha) \,.\, f(\beta) > 0 \qquad f(\beta)(2c + b(\alpha + \beta) + 2a\alpha\beta) < 0$$

et on a ainsi les trois conditions de M. Gérard. Le système (v') peut s'écrire,

$$(v'') \quad \Delta > 0 \ , \quad f(\alpha) \,.\, f(\beta) > 0 \ , \quad a(2c + b(\alpha + \beta) + 2a\alpha\beta) + b^2 - 4ac > 0 \ ,$$

où l'on remarque que le premier système est plus avantageux que le dernier, la dernière condition étant linéaire par rapport aux coefficients de l'équation donnée.

3. — Les conditions (u') ou (v') peuvent être interprétées, en effet, les nombres $\frac{x' - \alpha}{\beta - x'}$ et $\frac{x'' - \alpha}{\beta - x''}$, sont racines de l'équation du second degré transformée homographique de (1), la transformée étant ;

$$y = \frac{x - \alpha}{\beta - x} \ ,$$

et on retrouve ainsi la méthode même de M. Gérard, où l'on remarque qu'il n'est pas nécessaire de former explicitement cette équation transformée, puisque l'on connaît d'après (u') les conditions auxquelles doivent satisfaire les racines de cette dernière équation. Remarquons aussi que si nous formons l'équation ;

$$\varphi(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \tag{2}$$

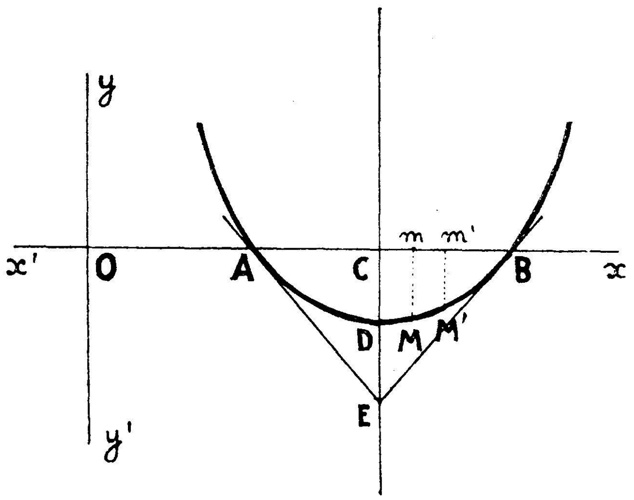
ayant pour racines les nombres donnés α et β, les conditions (ν') expriment précisément les conditions que l'on doit écrire si l'on veut classer les racines de l'équation (1) par rapport aux racines de l'équation (2) pour avoir l'ordre,

$$\alpha \quad x' \quad x'' \quad \beta \ ;$$

ou comme dans le cas précédent, à effectuer sur (1) la transformation $y = (x - \alpha)(\beta - x)$ et à écrire que l'équation a deux racines positives.

4. — Je me propose dans ce qui va suivre de résoudre en m'appuyant sur quelques considérations géométriques le problème du classement des racines de l'équation (1) par rapport à deux nombres donnés, ou par rapport aux racines d'une autre équation donnée. Construisons la courbe définie par l'équation ;

$$\varphi(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \ , \tag{3}$$



et soit,

$$y = mx + n \tag{4}$$

l'équation d'une droite qui rencontre la courbe en deux points ayant pour abscisses les racines x' et x'' de l'équation (1), on aura les valeurs de m et n, en écrivant que l'équation aux abscisses,

$$mx + n = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \ ,$$

de la rencontre de la droite définie par l'équation (4) avec la courbe définie par l'équation (3) a les mêmes racines que l'équation (1), on a donc;

$$\frac{1}{a} = -\frac{\alpha + \beta + m}{b} = \frac{\alpha\beta - n}{c},$$

et l'équation (4) peut s'écrire,

$$y = -\left(\alpha + \beta + \frac{b}{a}\right)x + \alpha\beta - \frac{c}{a}. \tag{5}$$

Si nous menons les tangentes à la courbe (3) aux points A et B d'abscisses α et β et si nous désignons par E, le point commun de rencontre de ces tangentes avec l'axe de la courbe dont l'équation est;

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \tag{6}$$

on sait d'après une propriété de la parabole que le sommet D de la parabole est le milieu de la sous-tangente CE, et comme

$$CD = -\frac{(\beta - \alpha)^2}{4};$$

donc

$$CE = -\frac{(\beta - \alpha)^2}{2}. \tag{7}$$

Si nous désignons par y l'ordonnée du point d'intersection de la droite (5) avec l'axe de la parabole définie par l'équation (6), on trouve en effectuant le calcul

$$y = -\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2a}. \tag{8}$$

Ceci posé, les classements possibles sont;

$$\alpha, x', \beta, x''; \qquad x', \alpha, x'', \beta; \qquad x', \alpha, \beta, x'';$$

$$x', x'', \alpha, \beta; \qquad \alpha, \beta, x', x''; \qquad \alpha, x', x'', \beta.$$

Les ordonnées correspondants à x' et x'' sont d'après (3) $\varphi(x')$ et $\varphi(x'')$, or ces ordonnées sont de signe contraires dans le premier et deuxième classement et de mêmes signes dans les quatre derniers, remarquons de plus que l'on a,

$$\varphi(x') \cdot \varphi(x'') = \frac{f(\alpha) \cdot f(\beta)}{a^2},$$

par conséquent le premier classement est possible si l'on a;

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0; \qquad \alpha + \beta + \frac{b}{a} < 0$$

et le deuxième si l'on a ;

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 \ ; \qquad \alpha + \beta + \frac{b}{a} > 0 \ .$$

Si $f(\beta) \cdot f(\beta) > 0$, le classement possible est l'un des quatre derniers, or l'ordonnée y de la rencontre des droites (5) et (6) est positive dans le troisième classement et négative dans les trois derniers ; on aura donc le troisième classement si l'on a ;

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0 \ ; \qquad y > 0 \ .$$

Dans le quatrième ou cinquième classement, on remarque que l'ordonnée y est plus grande en valeur absolue que CE et inférieure à CE dans le dernier cas. On aura donc le quatrième classement si l'on a ;

$$\Delta > 0 \ ; \quad f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0 \ ; \quad y + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} < 0 \ ; \quad \alpha + \beta + \frac{b}{a} > 0$$

en ayant égard à (7), et les conditions du cinquième classement sont ;

$$\Delta > 0 \ ; \quad f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0 \ ; \quad y + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} < 0 \ ; \quad \alpha + \beta + \frac{b}{a} < 0 \ .$$

Enfin le sixième classement aura lieu si l'on a ;

$$\Delta > 0 \ ; \quad f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0 \ ; \quad y < 0 \ ; \quad y + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} > 0 \ ,$$

or les dernières conditions sont équivalentes à la condition

$$y\left(y + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}\right) < 0 \ ,$$

donc les conditions sont,

$$\Delta > 0 \ ; \quad f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0 \ ; \quad y\left(y + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}\right) < 0 \ .$$

Remarquons en remplaçant dans cette dernière condition y par sa valeur donnée par (8) que cette condition peut s'écrire,

$$(f(\alpha) + f(\beta))(f(\alpha) + f(\beta) - a(\beta - \alpha)^2) < 0 \ ,$$

et comme $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont de même signe, elle peut encore s'écrire ;

$$f(\beta)(f(\alpha) + f(\beta) - a(\beta - \alpha)^2) < 0$$

et où l'on remarque que l'on a ;

$$f(\alpha) + f(\beta) - a(\beta - \alpha)^2 = 2c + b(\alpha + \beta) + 2a\alpha\beta \ .$$

On obtient ainsi les trois conditions (u'') du nº 2.

5. — Les six groupes de conditions, correspondant à ces six classements, étant symétriques par rapport à α et β et l'expression $(\beta - \alpha)^2$ étant le discriminant Δ' de l'équation ;

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 ,$$

la même méthode nous donne le classement des racines de l'équation (1) par rapport aux racines de cette dernière équation supposée de la forme ;

$$\varphi(x) = x^2 + \frac{b'}{a'}x + \frac{c'}{a'} = 0 ,$$

il suffit seulement d'ajouter aux conditions du troisième, quatrième et cinquième classement la condition $\Delta' > 0$.

6. — Si le point d'intersection de la droite définie par l'équation (5) avec l'axe de $x'x$ coïncide avec l'un des points A ou B, on remarque que les équations (1) et (3) admettent une racine commune, et cette racine commune est l'abscisse

$$x = -\frac{\alpha\beta - \frac{c}{a}}{\alpha + \beta + \frac{b}{a}}$$

de ce point d'intersection, que l'on peut encore écrire

$$x = -\frac{\frac{c'}{a'} - \frac{c}{a}}{\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}} ,$$

en supposant l'équation (3) mise sous la forme

$$a'x^2 + b'x + c' = 0 ,$$

et comme ce nombre est la solution commune de cette dernière équation et de l'équation (1), on doit avoir

$$f\left(-\frac{\frac{c'}{a'} - \frac{c}{a}}{\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}}\right) = 0 .$$

Ceci exprime la condition pour que les deux équations admettent une solution commune, et le classement des racines n'offre plus aucune difficulté.