Note II. — Carrés panmagiques de module 4n.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Si cette équation est résoluble, on doit pouvoir écrire :

$$A = ab + bd + cd\ , \qquad B = ab + ac + cd\ .$$

Or on a dans ce cas :

$$A^2 + B^2 - AB = (a^2 + d^2 + ad)(b^2 + c^2 + bc)\ .$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante est que le nombre $A^2 + B^2 - AB$ puisse se décomposer en deux facteurs de forme $x^2 + y^2 + xy$, expressson qui ne peut avoir pour facteurs que 3 ou des nombres premiers de forme $6h + 1$.

Si le nombre $A^2 + B^2 - AB = (A + B)^2 - 3AB$ est divisible par 3, il en est de même de $A + B$; or ce cas a été traité plus haut. (Théorème IV.)

IV. *Supposons qu'on puisse écrire* $A^2 + B^2 - AB = X^2 + Y^2 - XY$; *en posant* $x = 2X - Y$, $y = 2Y - X$, *on aura :*

$$(\delta) \qquad A + B \overset{2}{=} \frac{A + B \pm x}{3} + \frac{A + B \pm y}{3} + \frac{A + B \mp x \mp y}{3}\ .$$

En effet, cette relation revient à

$$(\varepsilon) \qquad 3(A^2 + B^2 - AB) = x^2 + y^2 + xy$$

ou bien à

$$A^2 + B^2 - AB = \left(\frac{2x + y}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y + x}{3}\right)^3 - \frac{2x + y}{3}\,\frac{2y + x}{3}\ .$$

(ε) donne $(x - y)^2 + 3xy \equiv 0 \pmod 3$, d'où $x \equiv y$ et $2x + y \equiv 0$. D'ailleurs on a :

$$(A + B)^2 \equiv (X + Y)^2 \equiv (2X - Y)^2 \equiv x^2 \equiv y^2\ .$$

Ainsi si $A + C$ est un non-multiple de 3, il en est de même de x et de y, et on prendra, pour les signes de x et de y, ceux qui donnent pour (δ) des nombres entiers.

V. *L'équation* $x + y = z + A + B$ *est toujours soluble, et elle a même, en général, quatre solutions.* On n'a, pour s'en assurer, qu'à changer dans (β) a et b, 1° en $\pm a$ et $\pm b$, 2° en $\pm b$ et $\pm a$.

Note II. — Carrés panmagiques de module $4n$.

Soit $n = 3$. Considérons, par exemple, l'égalité entre les 12 premiers entiers

$$1 + 11 + 3 + 9 + 8 + 7 = 12 + 2 + 10 + 4 + 5 + 6$$

dont les termes sont assujettis à cette condition que dans le même membre, il n'y ait pas de nombres complémentaires à 13 ; et formons avec ces nombres la figure ci-dessous

1	1	11	11	3	3	9	9	8	8	7	7
12	12	2	2	10	10	4	4	5	5	6	6

de quadrilles différents disposés horizontalement et tels que les nombres inférieurs soient les compléments à 13 des nombres supérieurs. Répétons identiquement cinq fois cette rangée sous la première : nous aurons évidemment un carré *panmagique* (c'est-à-dire tel qu'il reste magique en le séparant par une verticale ou une horizontale et assemblant autrement le carré, ou encore tel que toutes ses *lignes*[1] soient magiques).

De même, construisons la colonne ci-contre d'une manière analogue à l'aide de l'égalité

$$12 + 36 + 48 + 60 + 108 + 132 = 0 + 24 + 72 + 84 + 96 + 120 ,$$

et répétons la colonne cinq fois côte à côte : on obtiendra un second carré panmagique.

12	120
12	120
36	96
36	96
48	84
48	84
60	72
60	72
108	24
108	24
132	0
132	0

Additionnons, nombre à nombre, les deux carrés, il en résultera un troisième carré panmagique des 144 premiers entiers, dont voici ci-dessous un fragment :

13	121	23	131	...
24	132	14	122	..
37	97	47	107	...
48	108	38	98	...
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

On remarque que, par sa construction, tout carré de quatre nombres de ce dernier est magique, ce qu'on désigne en disant qu'il est à *grille* carrée de 4.

On ne connaissait pas de méthode simple de construction de tels carrés. Quant à ceux de module

[1] On appelle *ligne arithmétique* dans un carré magique, de module n, l'ensemble des n nombres d'une même horizontale, d'une même verticale, d'une même diagonale, ou d'une même *parallèle* à une diagonale, cette parallèle se composant de deux parties aboutissant aux extrémités d'une même verticale : on l'appelle aussi *diagonale brisée*.

$4n+2$, M. G. Tarry[1] doit bientôt faire voir que ces carrés sont doués de $2n$ lignes magiques et pas davantage.

M. G. Tarry est en outre l'auteur d'une foule de remarques, extensions, méthodes et découvertes sur les carrés magiques, théorie qu'il a poussée jusqu'à ses dernières limites, par ses *constellations*[2] et ses carrés magiques aux n premiers degrés, dont il publiera sous peu la construction.

A. Aubry (Dijon).

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS
DU
MOUVEMENT D'UNE PLANÈTE AUTOUR DU SOLEIL

Les équations différentielles du mouvement d'un point matériel m, assujetti à l'action d'une force centrale newtonienne, sont :

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mx}{r^3} ; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{my}{r^3}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 .$$

J'introduis une nouvelle variable indépendante s par l'équation

$$dt = r\,ds .$$

---

[1] A lire du même savant, sur le même sujet :
N. A., 1899, *Sur les lignes arithmétiques.* — *A. F.*, 1900, *Le prob. des 36 officiers*, solution longtemps cherchée de la célèbre question d'Euler. — *A. F.*, 1903, *Carrés panmagiques de base* 3n, figures longtemps crues impossibles. — *A. F.*, 1904, *Carrés cabalistiques* (panmagiques et aux deux premiers degrés) *eulériens* (ou des 8^2n^2 officiers) *de base* 8n. — *A. F.*, 1905, *Le carré trimagique de* 128 (magique aux trois premiers degrés). — *C. R.*, 1906, *Sur un carré magique*, note présentée par H. Poincaré et annonçant la possibilité de construire des carrés n magiques (magiques aux n premiers degrés). — *Soc. Philom.*, 1907, *La magie arith. dévoilée.* — *Soc. math.*, 1911, *Sur la magie arith.*

[2] Sur un carré magique supposé répété à droite et à gauche, au-dessus et au-dessous, on promène un carton percé de fenêtres de la dimension des cases. Il y a des dispositions de ces fenêtres telles que la somme des nombres vus en même temps est constante quelle que soit la position du carton sur le carré magique : une semblable disposition est une *constellation*, qui, par conséquent, constitue la magie la plus générale qui puisse être imaginée, surtout si on étend cette conception aux espaces supérieurs. M. Tarry a calculé qu'un carré magique de module n comporte $(n-1)!$ constellations différentes et $[(n-1)!]^{m-1}$ s'il est généralisé dans l'espace à m dimensions. (Voir G. Arnoux, *Espaces arith.*, p. 75 et seq.)