SUR L'OPÉRATION « TRANSPORT DE SEGMENTS RECTILIGNES » DANS LES CONSTRUCTIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Autor(en): **Loria, Gino**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15532

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR L'OPÉRATION « TRANSPORT DE SEGMENTS RECTILIGNES » DANS LES CONSTRUCTIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

I

Parmi les constructions élémentaires classiques de la géométrie descriptive il y en a un certain nombre qui exigent le « transport de segments de droites » d'une place à l'autre de l'épure; je cite comme exemples de cette espèce de constructions celles ayant pour but la projection P''' sur le plan de profil d'un point P dont on connaît la représentation (P', P'') dans la Méthode de Monge (voir fig. 1) ou bien de la trace t_3 sur le même plan d'un plan déterminé par ces traces t_1, t_2 (même figure).

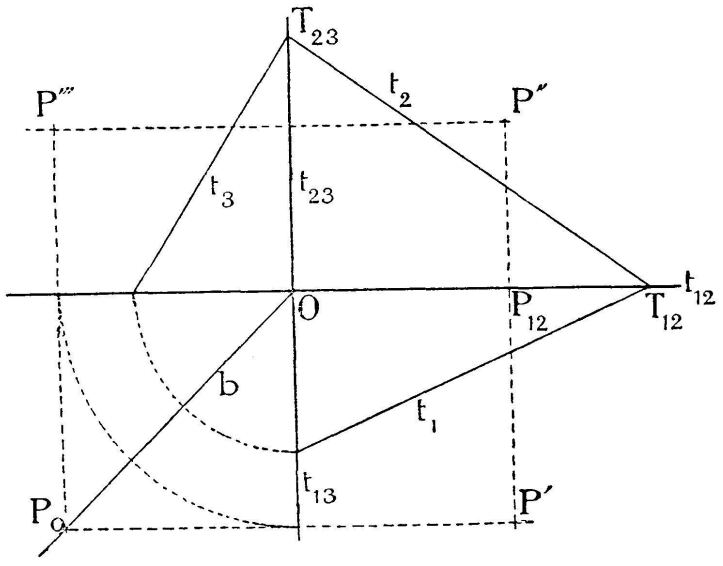

Fig. 1.

Or ces constructions, quelques simples qu'elles soient, offrent des inconvénients assez graves dans leur exécution pratique, *car dans chaque cas il faut savoir dans quel sens le transport doit avoir lieu.*

Pour ce qui a rapport à la première des questions que je viens de citer, la difficulté a été vaincue de la manière la plus heureuse par M. E. Waelsch [1] par un procédé désormais ancien, que je vais exposer.

---

[1] *Ueber eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie* (Monatshefte f. Math. und Phys., T. III, 1892, p. 92-96).

Appellons t_{12} la ligne de terre et t_{13}, t_{23} les intersections du plan de profil avec les plans horizontal et vertical de projection après le rabattement de tous les plans fondamentaux sur l'épure ; appellons encore P_{12} et P_{23} les intersections des droites t_{12} et t_{23} avec les ordonnées $P'P''$ et $P''P'''$; pour distinguer les différentes régions du plan du dessin nous fixerons un sens positif sur la ligne de terre t_{12} et un sur la droite t_{23} en faisant la convention suivante : un observateur étendu sur la droite t_{12} (ou t_{23}) de manière que le sens pieds-tête coïncide avec le sens positif de cette droite a, à sa droite, la région positive du plan horizontal π_1 (ou respectivement du plan vertical π_2). Cela posé, la côte verticale du point arbitraire P est le nombre que mesure le segment $P'P_{12}$ ou bien le segment $P'''P_{23}$, nombre pris avec un signe bien déterminé. Par conséquence (fig. 1), si P_0 est le point ou se coupent les parallèles me-

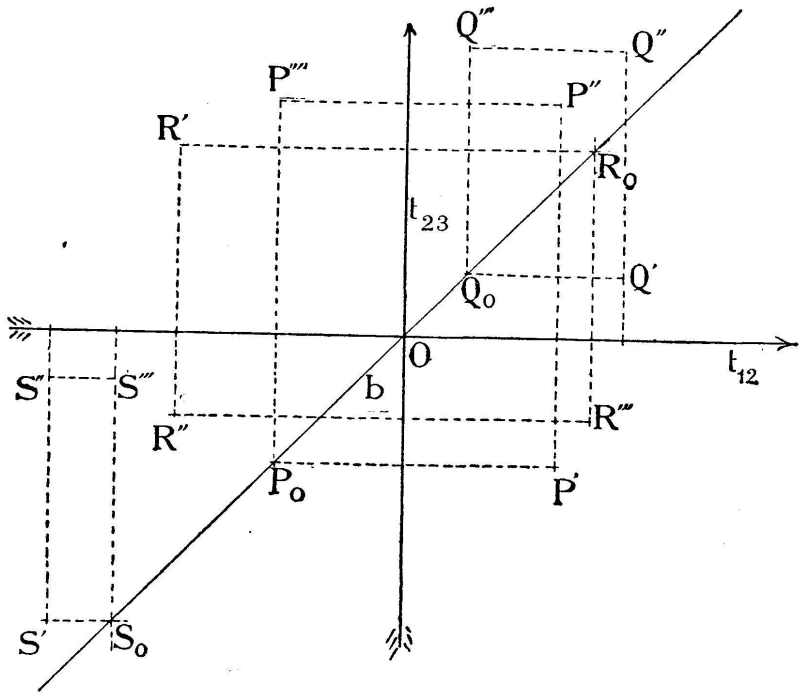

Fig. 2.

nées du point P'_{12} à t_{12} et du point P''' à t_{23} se trouve sur la bissectrice b de l'angle fermé par les directions positives des droites t_{12} et t_{23} : de là, la construction qui suit (fig. 2) : par le point donné P' menons la parallèle à la droite t_{12} et par le point P_0 où elle coupe la bissectrice b, conduisons la parallèle à t_{23} ; cette droite coupera au point cherché P''' la parallèle menée par l'autre point donné P'' à la ligne de terre. (Dans la fig. 2 on a répété cette construction sur plusieurs points P, Q, R, S, situés en des différentes régions de l'espace pour montrer qu'on peut l'exécuter « automatiquement » sans qu'il soit nécessaire aucune discussion préalable). Il est bon de remarquer qu'en l'exécutant dans un ordre différent

elle donne la première projection d'un point P déterminé sur ses projections sur le plan vertical et sur le plan de profil.

Ce procédé appliqué à deux points arbitraires A, B d'une droite r mène à sa projection sur le plan de profil, car r''' n'est que la droite qui joint A''' et B''' ; il convient en général de choisir (fig. 3) comme points auxiliaires les deux traces T_1 et T_2 de la droite r sur les deux premiers plans de projection (voir fig. 3). Ajoutons que sur la droite r on peut considérer un troisième point, c'est sa trace T_3 sur le plan de profil ; pour déterminer ce point remarquons que T''_3 est le point ou r'' coupe t_{23} ; de manière que $T'''_3 = T_3$ n'est que le point auquel r''' est coupée par la perpendiculaire menée du point T''_3 à la droite t_{23}. En reconnaissant T''_3 et T'''_3 il est aisé de trouver T'_3 par la méthode exposée ci-dessus ; cette construction offre une vérification car T'_3 doit tomber sur r'. La figure prouve aussi qu'on peut trouver $T'''_3 = T_3$ à l'aide de points T'_3 et T''_3, sans avoir recours à la projection r'''.

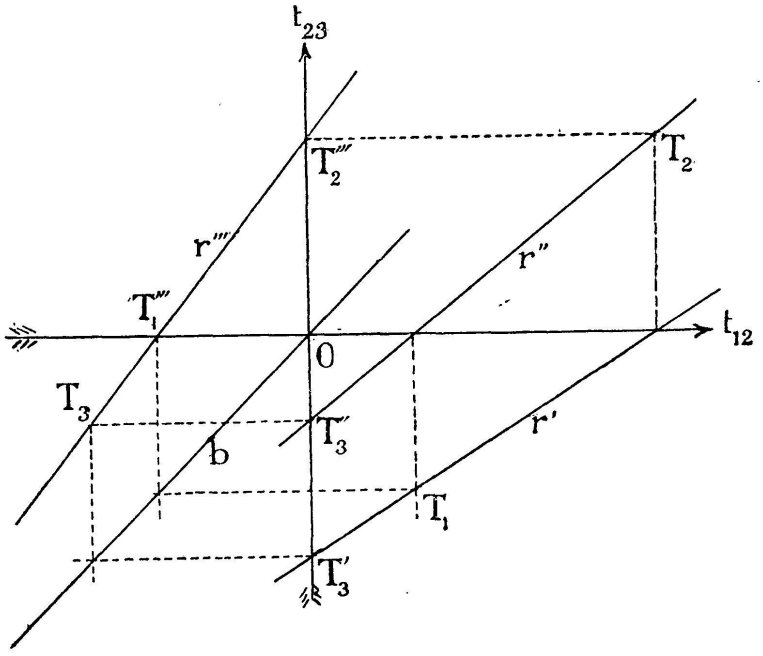

Fig. 3.

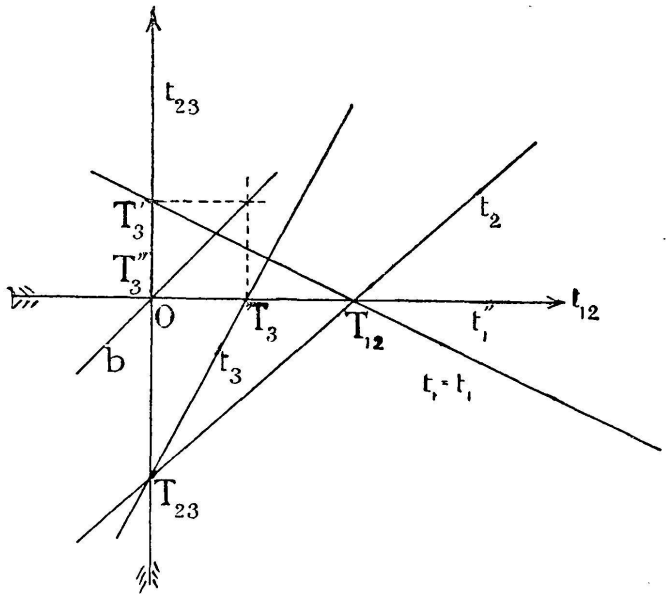

Fig. 4.

De tout cela, on peut tirer une construction tout à fait sûre de la troisième trace t_3 d'un plan donné par ces traces t_1 et t_2 (fig. 4). Remarquons, en effet, que de la même manière que t_1 et t_2 se coupent en un point T_{12} de la ligne de terre t_{12}, t_2 et t_3 iront se rencontrer dans un point T_{23} de la droite t_{23} ; de manière que, pour déterminer t_3, on n'a besoin que d'en chercher

directement un point: à cet effet, il suffit de considérer une droite du plan $[t_1 t_2]$ et d'en construire, par le procédé exposé ci-dessus, la troisième trace T_3. Or, comme droite auxiliaire il convient de choisir la droite t_1: elle coïncide avec sa première projection t'_1, tandis que t''_1 tombe sur la droite t_{12}. T'_3 est le point $t_1 t_{23}$ tandis que T''_3 est le point $O = t_{12} t_{23}$; appliquons aux points T'_3 et T''_3 une construction précédente et nous obtiendrons le point $T'''_3 = T_3$; en le joignant au point T_{23} on aura de suite t_3. La figure prouve que les deux segments rectilignes OT'_3 et OT_3 sont égaux entre eux; cela suffit pour établir l'accord parfait de notre construction avec une de celles qui sont rappelées par la figure 1.

II

L'opération de transporter un segment se présente encore dans une autre catégorie de questions, c'est-à-dire dans celles relatives au changement des plans de projection dans la méthode de

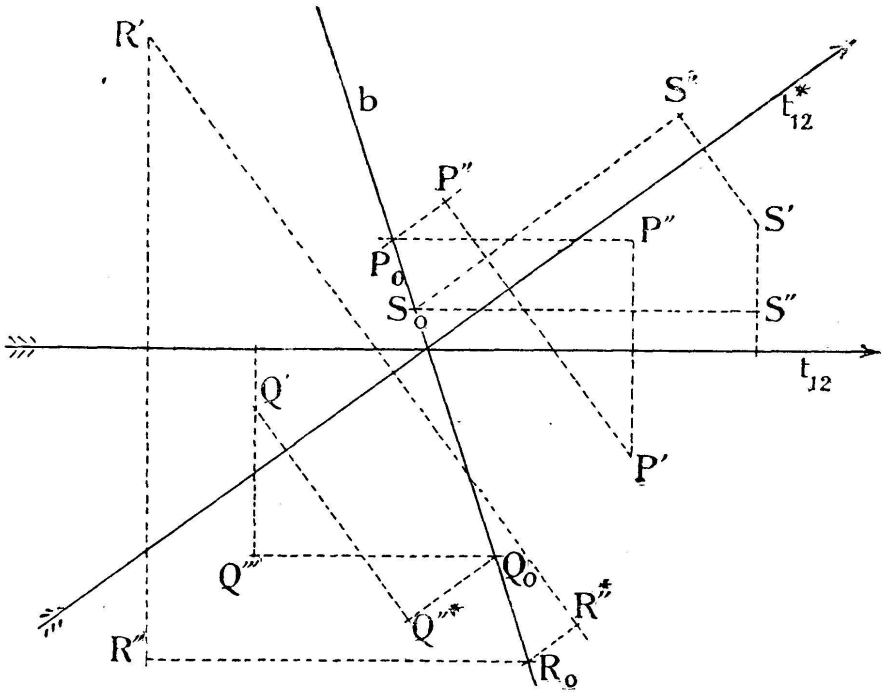

Fig. 5.

Monge. Nous allons nous en occuper à cause de leur considérable importance pratique, en nous bornant, comme c'est permis de le faire, au cas dans lequel on ne change qu'un des plans auxquels on rapporte toutes les figures de l'espace, par exemple, le plan vertical. Dans ce cas, les données de la question sont les deux lignes de terre, l'ancienne t_{12} et la nouvelle t^*_{12} et ce qu'il faut trouver est la nouvelle représentation d'un point, d'une droite ou d'un plan représentés par rapport au système primitif.

Soient d'abord (fig. 5) données les deux projections P' et P'' d'un point P dans le premier système et soit P'''^* la nouvelle projection verticale du point P ; si P_{12} et P^*_{12} sont les intersections des deux lignes de terre avec les ordonnées $P'P''$ et $P'P'''^*$, les deux segments $P''P_{12}$ et $P'''^*P^*_{12}$ seront égaux entre eux, car ils sont tous les deux mesurés par la côte horizontale du point donné ; par suite, on dit d'ordinaire que pour trouver P'' il suffit de transporter le segment $P''P_{12}$ sur la perpendiculaire $P'P^*_{12}$ à partir de son pied *dans un sens déterminé*. Pour éviter la discussion qui est nécessaire pour fixer dans chaque cas *quel est ce sens*, appelons P_0 le point ou la parallèle menée de P'' à t_{12} coupe la parallèle menée de P'''^* à t^*_{12} ; P_0 tombera évidemment sur la bissectrice b de l'angle formé par la

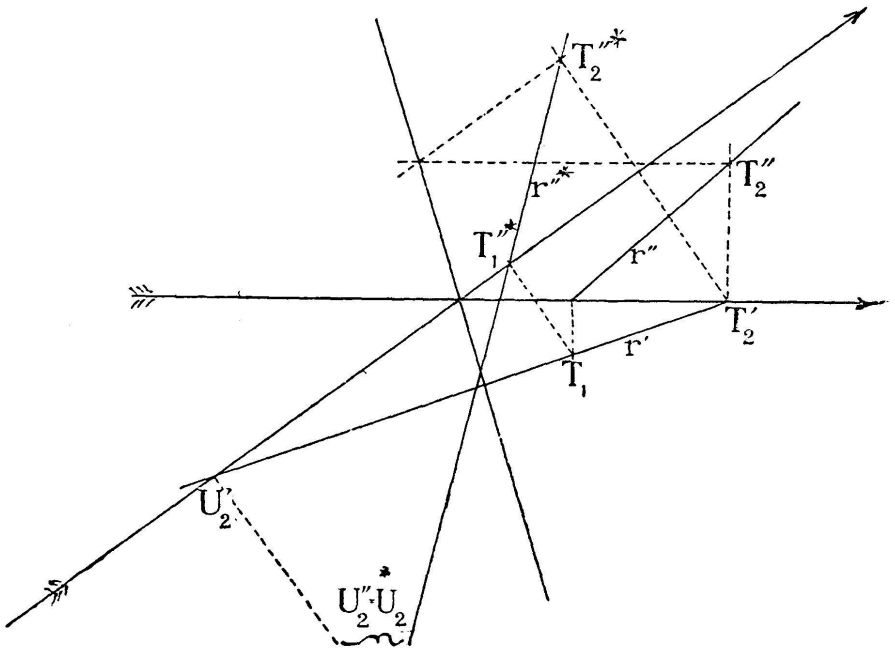

Fig. 6.

direction positive de t_{12} et la direction négative de t^*_{12}. Cette bissectrice menée, pour trouver P'''^* on peut procéder de la manière suivante : Du point P'' on mène la parallèle à t_{12} ; soit P_0 son intersection avec la droite b ; du point P_0 on tire la parallèle à t^*_{12} ; le point où elle coupe la perpendiculaire menée de P' à t_{12} est le point cherché P'''^*. (Dans la fig. 5, nous avons exécuté cette construction sur plusieurs points P, Q, R, S placés en des régions différents de l'espace).

A présent, pour déterminer la nouvelle représentation d'une droite r, il est évidemment suffisant de répéter cette construction sur deux de ses points ; en général, il convient de choisir encore comme points auxiliaires ses deux traces T_1 et T_2, mais il est bon de se rappeler la possibilité d'autres choix pour se tirer d'affaire dans les cas douteux. Dans la fig. 6 on a appliqué la construc-

tion que nous venons d'exposer à la détermination de la nouvelle projection verticale r'''^* de la droite dont r' et r'' sont les projections et T_1 et T_2 sont les traces ; nous remarquons sur cette figure que, si du point ou r' coupe la nouvelle ligne de terre on mène la perpendiculaire à cette droite, son intersection avec la droite r'''^* donnera la nouvelle trace verticale U_2 de la droite considérée.

Pour épuiser la question, il nous reste à parler des plans (fig. 7). Nous supposerons données les traces t_1 et t_2 d'un plan τ dans le système dont t_{12} est la ligne de terre et nous nous proposons d'en trouver la trace verticale dans le système déterminé par la ligne de terre t^*_{12}. A cet effet nous remarquons d'abord que, tandis que t_1 et t_2 se coupent dans un point T_{12} de l'ancienne ligne de terre,

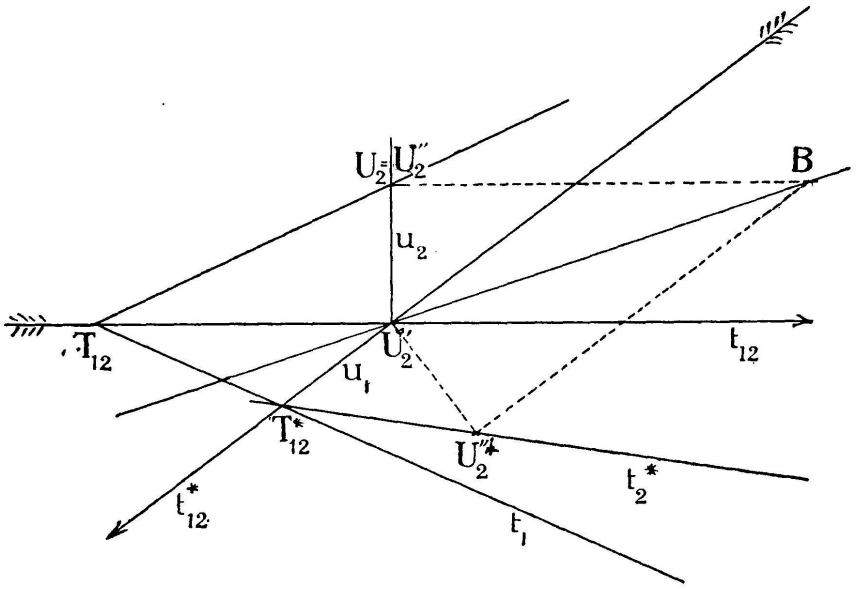

Fig. 7.

t_1 et t^*_2 se couperont dans un point T^*_{12} de la nouvelle ; de manière qu'on a tout de suite un point de la droite cherché, c'est le point $t_1 t^*_{12} = T^*_{12}$. Pour en trouver un autre, je remarque que le nouveau plan vertical, dans l'ancien système, a sa trace horizontale u_1 coïncidente avec la nouvelle ligne de terre t^*_{12}, tandis que sa trace verticale u_2 est la perpendiculaire menée à t_{12} par le point $t_{12} u_1$. D'ailleurs la nouvelle trace verticale du plan r est l'intersection des deux plans $[t_1, t_2]$ et $[u_1, u_2]$. Cette droite a dans l'ancien système comme traces les points $U_1 = t_1 u_1$ et $U_2 = t_2 u_2$. Or la droite t_2 est l'intersection des plans τ et π_2, tandis que u_2 est l'intersection des plans π_2 et π^*_2, de manière que U_2 est en dernière analyse l'intersection des trois plans τ_1, π_2 et π^*_2 ; comme elle se trouve sur le nouveau plan vertical, elle coïncide avec sa nouvelle projection verticale ; si donc nous déterminons, par le procédé précédent, la nouvelle projection verticale U''^*_2 du point $U_2 = (U'_2, U''_2)$, par le point résultant ira passer la droite cherchée ; cette

droite est donc celle qui joint les deux points T_{12} et $U''^{\star}_{2}$; le problème est ainsi résolu, sans qu'on ait eu besoin de distinguer les différents cas auxquels donne lieu la situation du plan τ par rapport aux plans de projection. Le lecteur remarquera que, si B est le point de la bissectrice b où se coupent les parallèles menées de U''_2 à t_{12} et de $U''^{\star}_{2}$ à $t^{\star}_{12}$, les deux triangles rectangles $U'_2U''_2B$ et $U'_2U''^{\star}_{2}B$ sont égaux entre eux ; cette observation suffit pour établir l'accord de la construction que nous avons proposée avec celle qu'on trouve dans les traités.

Les constructions que nous venons d'exposer dans ce paragraphe trouvent des applications très importantes ; car, par exemple, c'est par un changement d'un des plans de projection qu'on résout de la manière la plus simple les problèmes de déterminer les intersections avec un plan d'un polyèdre ou d'une courbe gauche quelconque.

Gênes, 28 décembre 1913. Gino Loria.

LA LIGNE DE TERRE ET LE SECOND BISSECTEUR

Notes sur certains principes de la géométrie descriptive.

Introduction.

Il est vraisemblable que la représentation des figures à trois dimensions au moyen des projections remonte à une époque très reculée. Les projections n'étaient pas seulement employées dans les plans topographiques et dans les cartes, mais aussi dans les arts de la construction. La géométrie descriptive ne peut donc être attribuée à Monge comme une création ; il est cependant certain qu'il a rassemblé des documents épars, des tracés en usage dans la pratique ; il les a améliorés, complétés, et en a fait une véritable science, branche de la géométrie.

Le point capital de la doctrine de Monge est l'emploi de deux plans de projection fixes, rectangulaires, dont l'intersection est la ligne de terre. Aussi, dans la représentation du plan — qui est fondamentale — est-il amené immédiatement à considérer les *traces* ou droites d'intersection avec les deux plans de projection. L'importance attribuée aux traces par Monge est telle que les plans ne sont *jamais* donnés autrement dans son ouvrage. Son