V. — Les Intégrales elliptiques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

V. — *Les Intégrales elliptiques.*

14. — Les résultats précédents s'appliquent immédiatement aux intégrales elliptiques de première espèce. Convenablement interprétés ils contiennent la théorie complète de la réduction de ces intégrales à la forme normale de Weierstrass sans aucune résolution d'équations de degré supérieur; en outre, et du même coup, ils conduisent au théorème d'addition des intégrales elliptiques. Cette fusion en une seule formule de deux théories qui sembleraient de prime abord être bien éloignées l'une de l'autre est des plus remarquables; elle découle tout naturellement des théorèmes concernant les équations doublement quadratiques.

Soit F un polynôme doublement quadratique que je suppose d'abord non symétrique

$$F = X_2 y^2 + 2X_1 y + X_0 = Y_2 x^2 + 2Y_1 x + Y_0 \ . \tag{78}$$

Posons $F = 0$, et différentions, il vient

$$(X_2 y + X_1)\, dy + (Y_2 x + Y_1)\, dx = 0 \ ; \tag{78'}$$

ou bien, à cause de $X_2 y + X_1 = +\sqrt{X_1^2 - X_0 X_2} = \sqrt{X}$, et $Y_2 x + Y_1 = \sqrt{Y}$,

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0\,[1] \ . \tag{79}$$

Cette formule (78) donne donc une transformation algébrique d'une intégrale elliptique $\dfrac{dx}{\sqrt{X}}$ en une autre $\dfrac{dy}{\sqrt{Y}}$. Pour obtenir cette transformation explicitement, il faut, X étant donné, retrouver la forme F (78), c'est-à-dire décomposer X sous la forme $X = X_1^2 - X_0 X_2$. Une semblable décomposition est possible de ∞^4 manières, puisque X_1 contient trois paramètres et qu'un coefficient arbitraire peut passer de X_0 à X_2.

A chacune des décompositions ci-dessus correspond une forme F(78), partant un polynôme Z; d'après cet aperçu il semblerait que, X étant donné, il lui corresponde ∞^4 polynômes transformés Y. S'il en était ainsi, la différentielle $\dfrac{dx}{\sqrt{X}}$ pourrait, sauf un facteur constant, se transformer par l'intermédiaire d'une équation doublement quadratique en toute autre différentielle elliptique $\dfrac{dy}{\sqrt{Y}}$.

[1] Pour ne pas allonger, je supprime dans ce § les discussions de signe des radicaux; le lecteur fera bien d'ailleurs de leur vouer l'attention qu'elles méritent.

Mais nous savons que, en réalité, les choses se passent différemment.

Au lieu d'être quelconques les polynômes X et Y sont toujours équivalents ; comme conséquence de ce fait, parmi nos ∞^4 transformations de X en Y, il en existe ∞^1 qui transforment X en un seul et même Y. Par exemple, lorsque F est symétrique, Y ne diffère de X que par la dénomination de la variable ; les dites ∞^1 transformations constituent l'intégrale algébrique de l'équation d'Euler (79) et correspondent au théorème d'addition, les autres ∞^3 transformations changent X en ses équivalents.

Reprenons d'abord le cas général d'une transformation non-symétrique $F = 0$, et supposons donnés les polynômes X, Y aux invariants communs g_2, g_3.

Il existe ∞^1 formes F dont les discriminants D_y et D_x coïncident respectivement avec X et Y ; nous avons appris à construire toutes ces formes à la page ( ), et nous avons vu qu'il s'y introduit un troisième polynôme arbitraire Z possédant en commun avec X et Y les invariants g_2, g_3.

Les trois discriminants de la forme F, triplement quadratique ainsi constituée sont, comme nous l'avons vu,

$$D_x = 4\Delta YZ \ , \qquad D_y = 4\Delta ZX \ , \qquad D_z = 4\Delta XY \ . \tag{80}$$

Si donc on différentie, par rapport aux trois variables, l'équation $F = 0$, comme on l'avait différentiée en (78') par rapport à x et à y seulement, on obtient

$$\sqrt{D_x}\,dx + \sqrt{D_y}\,dy + \sqrt{D_z}\,dz = 0 \ ,$$

ou bien

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0 \ . \tag{81}$$

Telle est la formule générale que nous avions en vue.

Pour l'appliquer reprenons F symétrique en x et en y ; donnons-nous $X = f_{xx}$ et $Y = f_{yy}$, choisissons enfin $Z = 4z^3 - g_2 z - g_3$, où g_2 et g_3 sont, comme toujours, les invariants de f_{xx}.

Dans ces conditions, l'équation $F = 0$, s'écrit sous plusieurs formes équivalentes dont nous avons vu plus haut les principales ; ce sont

$$\left.\begin{aligned} &H_{xy} + z f_{xy} - z^2 (x - y)^2 = 0 \ , \\ &z = \frac{f_{xy} - \sqrt{f_{xx} f_{yy}}}{2(x-y)^2} \ , \\ &\left(\frac{\sqrt{f_{xx}} - \sqrt{f_{yy}}}{x - y}\right)^2 = a_0 (x+y)^2 + 4a_1(x+y) + 4(a_2 + z) \ . \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Toutes ces formules donnent lieu à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{f_{xx}}} + \frac{dy}{\sqrt{f_{yy}}} = - \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}. \tag{83}$$

Si en premier lieu, on suppose que dans le système (82), z représente une constante arbitraire, dz est nul; dans cette hypothèse, le système (82) nous met en possession de l'intégrale générale de l'équation d'Euler, comme on le voit dans l'équation (83) dont le second membre est nul d'après l'hypothèse. Je n'ai pas à exposer ici par quelles transformations faciles, on en conclut le théorème d'addition des fonctions elliptiques.

Si, en second lieu, nous donnons dans (82) à la lettre y la signification d'un paramètre constant, l'équation différentielle devient, quelle que soit la valeur de cette indéterminée,

$$\frac{dx}{\sqrt{f_{xx}}} = - \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}; \tag{84}$$

dans cette acception, le système (82) opère la réduction d'une différentielle elliptique quelconque $\frac{dx}{\sqrt{f_{xx}}}$ à la forme normale de Weierstrass $\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$.

Faisons enfin $x = y$, la première formule (82), donne la relation entre x et z sous la forme

$$z = - \frac{H_{xx}}{f_{xx}}, \tag{85}$$

équivalente, d'après (83), à l'équation différentielle

$$\frac{2dx}{\sqrt{f_{xx}}} = - \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}. \tag{86}$$

C'est la formule de duplication obtenue, pour la première fois, par M. Hermite. Par son moyen, le même problème de la réduction à la forme de Weierstrass se trouve résolu rationnellement. Le procédé usuel, pour démontrer cette formule remarquable, consiste à la déduire des équations générales (43) et (44) relatives au polynôme du 4^me^ degré; ce procédé a le défaut de laisser dans l'ombre la parenté qui unit la transformation (85) avec le théorème d'addition.

Supposons toujours donnée la forme f_{xx}, faisons-lui correspondre un argument elliptique u tel que

$$pu = -\frac{H_{xx}}{f_{xx}}, \qquad p'u = -\frac{T_{xx}}{f_{xx}^{3/2}}{}^{1}, \tag{87}$$

qui donnent, comme on vient de voir

$$\frac{2dx}{\sqrt{f_{xx}}} = -du . \tag{88}$$

Soient de même v et w des arguments elliptiques correspondant à f_{yy} et à Z ; on a donc

$$pv = -\frac{H_{yy}}{f_{yy}}, \quad p'v = -\frac{T_{yy}}{f_{yy}^{3/2}}, \quad \frac{2dy}{\sqrt{f_{yy}}} = -dv , \tag{89}$$

$$pw = -\frac{K}{Z}, \quad p'w = -\frac{U}{Z^{3/2}}, \quad \frac{2dz}{\sqrt{Z}} = -dw . \tag{90}$$

De ces formules (87) à (90), nous tirons

$$pu - e_i = -\frac{H_{xx} + e_i f_{xx}}{f_{xx}} = \frac{l_i^2}{4f_{xx}}, \quad \text{donc} \quad \sqrt{pu - e_i} = \frac{l_i}{2\sqrt{f_{xx}}}; \tag{91}$$

on a ainsi

$$\sqrt{pu - e_i} = \frac{l_i}{2\sqrt{f_{xx}}}, \quad \sqrt{pv - e_i} = \frac{m_i}{2\sqrt{f_{yy}}}, \quad \sqrt{pw - e_i} = \frac{n_i}{2\sqrt{Z}} . \tag{92}$$

Portons ces valeurs dans l'équation doublement quadratique $G = 0$, écrite sous sa forme trilinéaire (64), ainsi que dans l'équation différentielle correspondante (83), nous obtenons le théorème suivant;

Si trois arguments elliptiques u, v, w *sont liés par la condition*

$$\sum (e_j - e_k)\sqrt{(pu - e_i)(pv - e_i)(pw - e_i)} = 0 , \tag{93}$$

on a aussi

$$d(u + v + w) = 0 , \qquad \text{ou} \qquad u + v + w = \text{const.} \tag{94}$$

Remplaçons les $\sqrt{pu - e_i}$ etc... par leurs valeurs $\dfrac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}$; le théorème d'addition précédent prend un autre énoncé.

---

[1] T_{xx} représente ici le covariant T du tableau (A). K et U sont, de même, le Hessien et le covariant en question relatifs au polynôme $Z = 4z^3 - g_2 z - g_3$.

La somme

$$(e_2 - e_3)\sigma_1 u \sigma_1 v \sigma_1 w + (e_3 - e_1)\sigma_2 u \sigma_2 v \sigma_2 w + (e_1 - e_2)\sigma_3 u \sigma_3 v \sigma_3 w \ , \tag{95}$$

qui est nulle pour $\mathrm{u} = \mathrm{v} = \mathrm{w} = 0$, *le reste quand* $\mathrm{u} + \mathrm{v} + \mathrm{w} = 0$; *en outre, à cause de la parité des* $\sigma_i(\mathrm{u})$, *la même relation est satisfaite pour toutes les combinaisons des signes* $\pm$ *dans la formule*

$$u \pm v \pm w = 0 \ .$$

Ce résultat est conforme de tout point à l'équation bien connue dans la théorie des fonctions σ

$$\sum (e_j - e_k)\sigma_i(u)\sigma_i(v)\sigma_i(w) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Pi\sigma\left(\frac{u \pm v \pm w}{2}\right) ; \tag{96}$$

il valait la peine de noter ici combien cette formule se rattache étroitement à l'équation d'Euler et aux polynômes doublement quadratiques.

C. CAILLER (Genève).

SUR L'ORTHOGONALISATION DE FONCTIONS

1. — Considérons le système

$$\varphi_0 \cdot \varphi_1 , \varphi_2 , \ldots$$

de fonctions arbitraires et linéairement indépendantes de la variable réelle x. Exprimons pareillement par ψ_r celle parmi les expressions de forme

$$a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_{r-1}\varphi_{r-1} + \varphi_r \ ,$$

où les a sont des constantes réelles, qui rend l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} (a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots a_{r-1}\varphi_{r-1} + \varphi_r)^2 dx$$