

BIBLIOGRAPHIE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1912)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

en 1875 sous l'influence de Luigi CREMONA et dans l'esprit de Poncelet, Chasles et Steiner.

Cet enseignement, destiné à l'origine à servir de préparation à la géométrie descriptive et à la statique graphique, prit, grâce à l'ardeur des géomètres italiens pour cette discipline nouvelle, une extension hors de proportion avec le but proposé.

Tout le monde est d'accord pour enseigner la géométrie projective avec tous les développements récents aux futurs mathématiciens, mais la tendance actuelle est de réduire considérablement le programme des futurs ingénieurs.

A Bologne, ENRIQUES a fusionné le cours de géométrie projective avec celui de géométrie descriptive.

A Padoue, le professeur SEVERI fait suivre le cours de descriptive d'un cours de projective, réduit pour les ingénieurs.

Terminons en remarquant une analogie entre le sort de la géométrie projective et celui de l'analyse algébrique : Introduites comme branches de préparation scientifique, toutes deux ont acquis un développement considérable, jugé bientôt excessif, et elles se voient ramenées à leur rôle initial.

BIBLIOGRAPHIE

W.-G. BORCHARDT et A.-D. PERROTT. — **Geometry for Schools.** — Vol. I covering stages I and II of the Board of Education circular, n° 711, 1909. — Vol. II, stage III, section I. — 2 vol. in-16, VI-52-III p. et VIII-110-IV p.; 1 s. et 1 s. 6 d.; G. Bell and Sons, Londres.

La Circulaire de 1909 du *Board of Education*¹, relative à l'enseignement de la géométrie et de l'algèbre graphique dans les écoles secondaires, en Angleterre, donnait des indications sur les tendances qui doivent inspirer la réforme de l'enseignement de la géométrie.

Tout en faisant une place aux conceptions modernes, l'enseignement tel que le présentent les nouveaux manuels anglais, ne rompt pas d'une manière aussi absolue avec la tradition d'Euclide que la majorité des manuels correspondants d'autres pays.

L'ouvrage de MM. Borchardt et Perrott est dans ce cas; il répond cependant aux exigences nouvelles, telles qu'elles sont énoncées dans la Circulaire du Board.

Le premier volume est une initiation très objective aux notions fondamentales de la géométrie : volume, surface, dimension, ligne, direction, lignes parallèles, angles, mesure des longueurs et des angles; triangles, égalité des triangles, dessins à l'échelle.

Les démonstrations en sont rigoureusement exclues, toutes les notions sont énoncées sous forme de faits (facts) à vérifier par le dessin et accompagnés d'exercices et d'applications destinés à les rendre évidents.

¹ Voir la traduction de cette Circulaire dans l'*Ens. math.*, mai 1910.

Dans le second volume les auteurs reprennent les mêmes sujets, mais pour les traiter par une méthode nettement déductive. Les relations géométriques sont exprimées sous forme de théorèmes ordonnés selon une suite logique qui remplace l'ordre artificiel d'Euclide. Ces théorèmes sont accompagnés d'applications diverses, résolues ou à résoudre, problèmes théoriques (riders) et constructions graphiques.

Le volume est terminé par une série de problèmes gradués et par des applications numériques sur les hauteurs et les distances. Ces dernières sont également données à la fin du premier volume. Les réponses aux problèmes, proposés dans le cours de l'ouvrage, sont annexées à la fin de chaque volume.

Le champ parcouru est à peu près celui du livre I d'Euclide. En ce qui concerne l'ordre des matières, la division adoptée est celle du Board of Education. Le premier volume correspond aux degrés I et II. Le degré III est abordé dans le second volume avec les propriétés des triangles et parallélogrammes ; il sera complété par quatre autres volumes encore en préparation.

R. MASSON (Genève).

H. BROGGI. — **Versicherungsmathematik.** Deutsche Ausgabe. — 1 vol. in-8°, VIII-360 p. ; 7 M., broché (8 M. cart.) ; B. G. Teubner, 1912.

L'édition originale de ce traité des *Assurances sur la vie* a été publiée en italien (Collection Hœpli) ; elle a été suivie, peu de temps après, d'une édition française, puis maintenant d'une traduction allemande. Les comptes rendus que nous avons donnés des deux premières éditions nous permettent d'être brefs. Nous nous bornerons donc à rappeler que le principal objet du livre est l'exposé des bases théoriques et techniques des Assurances sur la vie ; on y trouvera notamment les principes du calcul des probabilités et de la théorie des erreurs, des notions sur la statistique et l'établissement des tables de mortalité, et l'examen des problèmes fondamentaux des Assurances sur la vie et de la théorie du risque.

Les questions sont posées avec beaucoup de clarté et de concision. A la fois distingué professeur et praticien très habile, l'auteur est parvenu à faire un traité qui sera lu avec profit aussi bien par les professeurs que par les actuaires. Pour les étudiants il constitue une excellente introduction à la théorie des assurances.

P. DUHEM. — **Traité d'Energétique ou de Thermodynamique générale.** Tome II. Dynamique générale. Conductibilité de la chaleur. Stabilité de l'équilibre. — 1 vol. gr. in-8° de 504 p. ; 18 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce tome est à la dynamique ce que le premier était à la statique (voir l'analyse publiée ici-même, T. XIII, 1911, p. 345). On se rend de plus en plus compte de l'impossibilité de rester sur le terrain de l'ancienne mécanique quand on étudie les mouvements de systèmes continus tels que fils, membranes, fluides. Qu'on le veuille ou non, la viscosité, les dégagements de chaleur interviennent et les considérations thermodynamiques se superposent aux considérations dynamiques proprement dites. Et peut-être encore ce mot de superposition est-il assez mal choisi. Il ne s'agit pas de compléter la dynamique mais plutôt de lui laisser la même forme, le même langage et ses mêmes principes sous leur ancien nom, en montrant qu'on peut traiter la partie thermique de l'énergie comme la partie purement cinétique

on du moins qu'on peut faire figurer ces deux parties dans des mêmes équations écrites sous des formes suffisamment générales.

Un tel idéal paraît parfois difficile à atteindre, mais parfois aussi il est dépassé. Ainsi les notions d'énergie interne, de potentiel interne, d'entropie, qui s'appliquent aisément à un fluide compressible, s'appliquent de même à un corps aimanté.

Quant aux cas où l'on ne peut mettre en équations le mouvement d'un système général au moyen des seuls principes de l'Energétique générale, on peut les traiter cependant au moyen d'hypothèses supplémentaires, telles celles de Fourier sur la conductibilité thermique. Au sujet de cette conductibilité, on sait que le champ thermique dépend linéairement de neuf coefficients de conductibilité

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3$$

$$B_1 \quad B_2 \quad B_3$$

$$C_1 \quad C_2 \quad C_3$$

que l'on suppose symétriquement égaux par rapport à la diagonale principale de ce tableau. Au point de vue pratique, étant donné les milieux habituellement considérés, Lamé ne voyait pas là des hypothèses restreignant la généralité. Cependant M. Duhem n'a pas jugé inutile d'écrire presque tout son chapitre relatif à la conductibilité en se passant de la symétrie précitée, pour montrer ensuite les seuls cas où il était nécessaire de l'invoquer.

Presque toute la seconde moitié du volume est consacrée aux conditions de stabilité de l'équilibre. Comme on le prévoit sans peine, le point capital est l'extension en énergétique générale du théorème de Lejeune-Dirichlet. Cela ne va pas sans soulever de nombreuses difficultés; quand elles sont trop grandes, M. Duhem se rabat avec habileté sur des cas particuliers mais, bien loin de paraître inventer ceux-ci pour les besoins de sa cause, il paraît retrouver toutes les tentatives faites dans le même sens par MM. Poincaré, Painlevé, Hadamard; il signale toutes les singularités signalées par ceux-ci en jetant entre elles les traits d'union que, malgré tout, ses méthodes donnent encore.

On voit que je suis ramené, comme en analysant le tome I, à ne pas pouvoir passer sous silence l'habileté d'analyste que déploie l'auteur. Elle s'est d'ailleurs manifestée en bien des endroits précédents, notamment lorsqu'il tire les équations du mouvement d'un système continu du calcul des variations.

L'ouvrage tout entier montre ce qu'il faut savoir écrire quand on veut se rapprocher de la réalité et non pas négliger celle-ci pour écrire des équations simples donnant sans peine d'élégants développements. Si bien qu'ensuite, si l'on veut absolument se rabattre sur les cas particuliers qu'il est possible de développer jusqu'au bout, on saura *exactement* ce que l'on néglige tandis qu'on ne s'en rend compte que d'une manière extrêmement vague si l'on écrit immédiatement des équations réduites.

A. BUHL (Foulouse).

C. GODFREY et A.-W. SIDDONS. — **A shorter Geometry.** — 1 vol. in-16, XXII-301 p.; 2 s. 6 d.; Cambridge University Press.

MM. Godfrey et Siddons ont publié en 1903 un manuel ayant pour titre « Elementary Geometry »; le volume actuel quoiqu'intitulé Abrégé de géo-

métrie, « *Shorter Geometry* », en est un remaniement, conçu dans l'esprit de la Circulaire de 1909 du *Board of Education*. Les principes directeurs sont par conséquent sensiblement les mêmes que ceux qui ont guidé MM. Borchardt et Perrott; seulement avec MM. Godfrey et Siddons le champ parcouru est plus vaste, il embrasse les trois degrés dans un seul volume.

Les degrés I et II, qui font l'objet des 74 premières pages, sont une réimpression du volume des mêmes auteurs « *Geometry for Beginners* », publié en 1909 à la suite de la circulaire du *Board of Education*. Ce volume était lui-même une mise au point, basée sur les idées nouvelles, du début de leur manuel de Géométrie Élémentaire.

Pour les deux premiers degrés nous nous bornerons donc à renvoyer au compte rendu de ce volume publié dans le numéro de mars de l'*Enseignement Mathématique*.

Le troisième degré fait l'objet des deux derniers tiers du livre que nous considérons ici. Suivant les indications de la circulaire du *Board*, MM. Godfrey et Siddons introduisent la méthode déductive avec ce troisième degré. Cependant ils n'abandonnent pas pour cela absolument l'induction. Les théorèmes accompagnés d'une démonstration rigoureusement déductive, sont souvent précédés d'exercices destinés à suggérer leur énoncé. Ils sont du reste suivis d'un grand nombre d'applications théoriques et pratiques. Le déplacement continu d'une figure est appliqué, à la fin du chapitre consacré au cercle, à des problèmes de recherche de quelques lieux géométriques et enveloppes de droites et de cercles.

L'emploi simultané de la déduction et de l'induction a l'avantage d'introduire les théorèmes comme une énonciation des faits observés, des mesures effectuées, c'est-à-dire de présenter à l'élève la géométrie non comme des propositions arbitrairement choisies et ordonnées, mais comme une conséquence naturelle de son observation. Si ce manuel était mis sans guide entre les mains de l'élève, on pourrait peut-être craindre que la multiplicité même des observations ne l'égare en lui faisant perdre de vue la démonstration formelle et la liaison logique des théorèmes. Sous une bonne direction, ce danger disparaît et le livre ne peut être qu'un auxiliaire précieux.

Une série de questions proposées à divers examens termine le volume.

R. MASSON (Genève).

G. KOWALEWSKI. — **Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen** (Fortsetzung der Grundzüge der Differential und Integralrechnung, zugleich eine Einführung in die Funktionentheorie). — 1 vol. in-8°, IV et 455 p.; broché, M. 12; relié M. 13; B. G. Teubner, Leipzig, 1911.

Ce livre est caractérisé par les mêmes qualités de simplicité et de rigueur qui font des « *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung* » du même auteur un de nos meilleurs livres pour étudiants. L'auteur part du principe qu'on ne saurait être trop exact et précis dans les définitions et les démonstrations, et il est convaincu que de telles exigences ne sont pas incompatibles avec la simplicité. Il a raison et ses livres le prouvent.

Voici le contenu sommaire du livre :

1. Les nombres complexes. 2. Fonctions complexes de variables réelles. 3. Fonctions d'une variable complexe. 4. Intégrales curvilignes. 5. Le théorème fondamental de Cauchy et ses conséquences. 6. Séries de fonctions et

produits infinis. 7. Le théorème de Mittag-Leffler et la représentation des fonctions en produits infinis d'après Weierstrass.

L'auteur s'est placé au point de vue de Cauchy-Riemann. Le titre même du livre laisse prévoir qu'il se borne à l'étude des fonctions monogènes et qu'il ne fait qu'effleurer l'étude des fonctions sur une surface de Riemann ainsi que le prolongement analytique. A noter cependant que le chapitre I contient une excellente étude des groupes de transformations linéaires, groupes finis et groupe modulaire. Cette étude est singulièrement simplifiée par l'emploi des formes hermitiennes que l'auteur introduit dès le début. Le chapitre VI contient encore en une cinquantaine de pages les fondements de la théorie des fonctions elliptiques. M. PLANCHEREL (Fribourg).

F.-W. LANCHESTER. — **Aerodynamik**. Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Aus den Englischen übersetzt von C. u. A. RUNGE. II. Band : *Aerodynamik*. Mit 208 Fig. — 1 vol. in-8°, 327 p., relié, 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Il n'est guère besoin d'insister sur l'intérêt d'actualité que présente le traité d'*Aerodynamik* de M. Lanchester. Le Tome II apporte des résultats d'ordre théorique ou expérimental qui seront étudiés avec profit par tous ceux qui s'intéressent ou qui travaillent aux questions si complexes du vol. Une attention toute particulière a été donnée aux problèmes qui se poursuivent depuis quelques années dans les laboratoires d'aviation : problèmes concernant le vol, le vol plané, la stabilité et l'équilibre et les méthodes d'essai.

En dehors des spécialistes, cet Ouvrage trouvera sans doute aussi un cercle très étendu de lecteurs parmi les mathématiciens et les ingénieurs qui désirent avoir un aperçu un peu complet de ce qui est acquis aujourd'hui dans la théorie de l'aviation au point de vue mathématique et mécanique et de ce qui est encore à la période d'essai ou à l'état empirique.

Enrique LEGRAND. — **Sommutations par une formule d'Euler** (de l'usage qu'on peut en faire pour résoudre de nombreux problèmes). Sumaciones por una fórmula de Euler (su aplicabilidad en la resolución de numerosos problemas). — 1 fasc. in-8°, 46 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

Cette brochure de 46 pages contient (texte bilingue juxtaposé), de nombreuses applications de la formule sommatoire d'Euler au calcul exact ou

approché de sommes de la forme $\sum_{v=0}^n f\left(a + v \frac{b-a}{n}\right)$. L'auteur montre

ainsi que la formule d'Euler conduit très rapidement à des résultats intéressants. Les questions traitées pourront être utiles aux étudiants. Les questions de convergence ou de semi-convergence des séries qui se présentent ne sont pas traitées. M. PLANCHEREL (Fribourg).

H. POINCARÉ. — **Calcul des probabilités**. Seconde édition revue et augmentée par l'auteur. — 1 vol. in-8° de IV-336 p. ; 12 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1911.

Je suppose que la première édition de cet ouvrage, par le seul fait qu'elle est épuisée, est suffisamment connue pour que je n'aie pas besoin de décrire la seconde en détail. Mieux vaut se consacrer surtout aux importantes ad-

jonctions dues à l'auteur. M. Poincaré a commencé par reproduire le chapitre sur *Le Hasard* publié par lui dans son ouvrage *Science et Méthode* : il obéit ainsi au sentiment qui a guidé ses prédécesseurs, notamment Laplace et Bertrand, qui, de leur côté, n'ont pas voulu parler du Calcul des probabilités sans intéresser le lecteur par un avant-propos en langage ordinaire, destiné à montrer le dit calcul dans les problèmes de la vie journalière et de la philosophie la plus pratique.

Mais j'ai hâte de passer aux nouveautés analytiques.

L'une des plus importantes est à coup sûr l'introduction des *fonctions caractéristiques*. Une telle fonction $f(\alpha)$ est la valeur probable de $e^{\alpha x}$. Donc

$$f(\alpha) = \Sigma p e^{\alpha x} \equiv \int \varphi(x) e^{\alpha x} dx ;$$

le sigma correspond au cas où x varie de manière discontinue, l'intégrale intervenant dans le cas où x varie continuellement. Or, en général, x variera de $-\infty$ à $+\infty$ et alors, d'après la formule de Fourier, une réciprocity apparaîtra entre la fonction f et la loi de la probabilité φ . A l'heure où le problème de l'inversion des intégrales définies prend une si grande importance, il n'était pas inutile de le reprendre ainsi, sous une de ses formes anciennes mais pouvant servir de modèle particulièrement simple et utile.

De plus on voit aisément, en considérant l'intégrale qui précède, qu'on peut varier la forme de $\varphi(x)$ de manière à exprimer non seulement la loi de Gauss, mais aussi autant d'autres lois qu'on voudra. Ces comparaisons possibles semblent fournir à M. Poincaré des justifications de la célèbre loi qui sont particulièrement importantes et immédiates.

De même, dans la théorie de l'interpolation, nous assistons à l'introduction de polynômes D_i tels que

$$\Sigma D_k D_i = 0 .$$

Si le sigma était remplacé par une intégrale, les D seraient des fonctions à caractère assez banal et l'égalité serait semblable aux égalités fondamentales sur lesquelles reposent de nombreux développements en série. Mais ici justement il s'agit de sommes d'un nombre fini de termes. Je ne puis expliquer en détail comment ces polynômes D conduisent à une méthode d'interpolation d'accord avec la méthode des moindres carrés mais, ici encore, l'analyse est extrêmement suggestive et élégante.

Un dernier chapitre, intitulé *Questions diverses*, est éminemment original et moderne. Dans le problème du battage des cartes, la probabilité d'un certain arrangement est exprimée à l'aide d'un nombre complexe dépendant de r unités complexes. Dans le problème de la répartition des décimales dans une table numérique, M. Poincaré considère, par exemple, la troisième décimale et imagine une fonction égale à $+1$ si cette décimale est paire, à -1 si elle est impaire. Il réussit à assimiler une telle fonction à une fonction périodique et à établir que sa valeur moyenne est nulle ou très petite. La conclusion est qu'il n'y a pas plus de chance pour que la décimale considérée soit paire qu'impair.

Enfin si nous considérons un liquide en mouvement permanent, dans lequel on distingue au début des molécules de couleurs différentes, nous croyons cependant qu'au bout d'un certain temps toutes ces molécules se-

ront mélangées. Etablir la chose en toute rigueur permettrait d'établir de même que, dans un système mécanique quelconque, satisfaisant toutefois aux équations de Hamilton, l'état final peut, après un temps suffisamment long, ne plus sembler dépendre de l'état initial, à moins que l'on n'imagine tout exprès des intégrales uniformes dont le but serait de conserver quelque chose.

De semblables hypothèses sont continuellement postulées en physique, notamment dans la théorie cinétique des gaz. Et pour prouver quels problèmes étranges et intéressants se trouvent derrière de telles considérations, il est impossible de ne pas mentionner l'application du Calcul des probabilités que vient de faire M. Poincaré dans une Note des *Comptes Rendus* (4 décembre 1911) *Sur la Théorie des Quanta*. D'après Planck, un corps rayonnant aurait une émission discontinue ; il serait assimilable à la réunion d'une foule d'oscillateurs hertziens ayant chacun une période propre. Mais quelle idée se faire d'un tel rayonnement où nous ne pourrions évidemment considérer isolément chaque oscillateur ? Le Calcul des probabilités l'indique et vient à l'appui de l'hypothèse de Planck. Une autre note de M. E. Bauer (26 décembre) revient sur la question. D'autres surgiront sans doute grâce à l'élan donné par M. Poincaré. Y a-t-il meilleure recommandation, auprès des physiciens, de la science ici exposée ?

A. BUHL (Toulouse).

H. POINCARÉ. — **Hypothèses cosmogoniques.** Leçons professées à la Sorbonne, rédigées par H. VERGNE. — 1 vol. gr. in-8° de XXVI-294 p. ; 12 fr. ; Hermann, Paris, 1911.

Ces leçons ont un intérêt historique très net à côté de l'intérêt scientifique proprement dit. M. Poincaré y passe en revue les principales hypothèses cosmogoniques en leur adjoignant une critique analytique que l'auteur de l'hypothèse a eu parfois le tort de négliger. Si nous ne remontons pas jusqu'à Lucrèce, du moins rencontrons-nous ici les noms de Kant, Laplace, Roche, Faye, du Ligondès, See, G.-H. Darwin, Helmholtz, Lockyer, Schuster, Arrhénius, Belot.

Dans cette suite, on peut dire que, jusqu'à Darwin inclus, la cosmogonie est surtout mécanique. On part toujours d'un état matériel primitif, plus ou moins informe, mais formé de particules obéissant aux lois de la mécanique et tout particulièrement à leurs attractions mutuelles. Les auteurs qui suivent ont recours à des considérations plus complexes au point de vue physique ; ils tiennent compte de la forme thermique de l'énergie.

Le premier point fort important est que M. Poincaré défend, encore avec une fort belle assurance, l'hypothèse de Laplace dont d'éminents contradicteurs ont annoncé la mort un peu prématurément. Il montre que l'objection des satellites à mouvement rétrograde n'est pas aussi redoutable qu'on pouvait le croire au premier abord. L'anneau qui, en se brisant, a pu donner naissance à une planète a pu laisser subsister de petits fragments non compris dans la planète formée, mais que celle-ci aura ensuite captés sous forme de satellites. Et la capture peut se présenter de manière telle qu'on obtienne un satellite gravitant dans n'importe quel sens.

Quant à la théorie de Faye, M. Poincaré n'y croit guère mais, par une analyse facile il en tire des problèmes simples et ingénieux. Elle reste élégante bien qu'elle ne soit point nécessaire pour expliquer les rotations planétaires de sens contraires.

L'hypothèse de M. du Ligondès offre encore l'occasion d'applications analytiques des plus remarquables. Et il s'agit du Calcul des probabilités dont la réintroduction ici donne encore plus de force à ce que j'ai dit dans l'article précédent. Pour M. du Ligondès l'Univers s'est formé de lambeaux chaotiques se choquant comme les molécules de la théorie cinétique des gaz. C'est à ce propos que M. Poincaré rétablit la loi de Maxwell sur la répartition des vitesses des molécules gazeuses, en développant davantage les considérations sur les liquides en mouvement permanent dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Avec Sir G.-H. Darwin, l'influence des marées prédomine. Beaucoup n'y ont pas pensé, les considérant comme un phénomène accessoire, mais celui-ci paraît avoir des effets non seulement sensibles, mais encore prédominants à la longue. Car Darwin vise plutôt la fin des choses que le commencement; les actions mutuelles des astres d'un même système produisent des marées liquides ou même solides qui tendent à égaliser toutes les durées de révolution ou de rotation. Il a d'ailleurs ses idées sur la formation de la Lune née de la Terre par segmentation alors que celle-ci avait une forme ellipsoïdale.

Avec Helmholtz nous nous préoccupons de l'origine des chaleurs terrestre et solaire. M. Poincaré semble admettre que toutes les théories sont incomplètes et qu'il y a des sources d'énergie inconnues de nous, pas plus connues à coup sûr que le radium pour Helmholtz.

Avec Lockyer nous sortons du système solaire et nous assistons à l'évolution du système inorganique de l'univers entier, mais l'auteur pour lequel j'ai le plus grand plaisir à montrer de la sympathie c'est à coup sûr Arrhénius. D'ailleurs M. Poincaré lui consacre plus de pages qu'à ceux qui le précèdent immédiatement. L'Univers d'Arrhénius est toujours vivant; l'énergie peut se dégrader dans certains systèmes, mais il conçoit une dégradation qui finit par désagréger la matière et par la remettre dans l'état où on la voit dans les nébuleuses. Certes ceci est difficile à accorder avec les principes de la thermodynamique, mais, d'autre part, est-il bien clair de faire mourir totalement l'Univers *dans le temps*, c'est-à-dire avec une notion qui n'est définissable que dans un univers existant et animé?

La théorie d'Arrhénius mérite sans doute une place d'honneur; en ne faisait ni naître ni mourir l'Univers dans le temps, elle supprime de graves difficultés métaphysiques au détriment du principe de Carnot, d'un principe physique, ce qui, je le reconnais, est aussi très grave en soi. Mais toutes les cosmogonies universelles sont imparfaites; à l'avenir de dire si les éléments de la théorie d'Arrhénius sont vraiment incompatibles; en attendant je suis persuadé qu'elle aura pour beaucoup un caractère séduisant.

M. Poincaré termine ces admirables leçons par l'étude de la distribution des étoiles dans la Voie Lactée, par quelques mots sur les nébuleuses spirales et par un exposé des idées de M. Belot. Toutes les hypothèses, malgré leur extrême diversité, sont traitées par une analyse simple et légère qui donne une grande impression d'uniformité. La rédaction soignée de M. Vergne a certainement contribué à cet heureux résultat.

A. BUHL (Toulouse).

H. RENFER. — **Lehrbuch der politischen Arithmetik** enthaltend Theorie und Uebungsbeispiele über die Zinseszins-, die Sparkassa-, die Renten und die Amortisationsrechnung, die verschiedenen Arten der Kapital-

rückzahlungen und die Aufstellung von Tilgungsplänen.— 1 vol. gr. in-8°, 190 p., br. 5 fr. (relié, 5 fr. 75); Fehr, Saint-Gall.

M. Renfer, frappé du peu d'exercices qu'on trouve dans les manuels d'arithmétique politique, s'est proposé de remédier à ce défaut; son livre contient donc un grand nombre de problèmes (250). Dans chaque question, M. Renfer déduit la formule, énonce le résultat en langage ordinaire puis donne quelques exemples, dont il expose la solution numérique avec tous les détails du calcul, en supposant d'abord que l'on dispose de tables d'intérêts composés, ensuite que l'on se sert de logarithmes; il termine par les énoncés sans solution de quelques problèmes.

Remarquons encore que l'auteur ne craint pas l'emploi de petits graphiques qui, sans être indispensables à la démonstration, contribuent cependant à soutenir la pensée.

M. Renfer s'est en outre efforcé d'introduire une notation systématique; il se rallie autant que possible à la notation qu'au Congrès international de Londres, les actuaires ont adoptée pour l'assurance sur la vie.

Le manuel est divisé en quatre parties: la première est consacrée au calcul d'intérêts composés, de provisions et d'échéances moyennes; sous le nom impropre de calculs de caisse d'épargne, la seconde traite des paiements périodiques; dans la troisième, nous trouvons les rentes immédiates différées, constantes ou variables suivant quelques lois simples; enfin, dans la quatrième partie, les annuités, les amortissements, les diverses manières de rembourser un capital, les conversions et la parité des cours.

A la fin de l'ouvrage sont réunies plusieurs tables pour le calcul des intérêts composés; elles sont d'une grande utilité pédagogique, car les tables numériques sont d'un emploi si fréquent qu'il faut en enseigner l'usage dans les écoles de commerce. A ce point de vue, elles auraient été encore meilleures, si M. Renfer avait supprimé celles qui se déduisent d'autres par un calcul très simple; il arrive, en effet, souvent que l'on n'a pas sous la main juste la table que l'on désire et l'on est heureux de savoir la remplacer par une autre. Nous regrettons aussi que M. Renfer n'ait pas mis à côté du titre de chaque table, la formule correspondante, car c'est la manière la plus commode pour le calculateur de définir un nombre. Mais ce ne sont que des détails.

Le manuel de M. Renfer est le résultat de plusieurs années d'enseignement à l'Académie de Commerce de Saint-Gall. Il est donc en première ligne destiné aux écoles professionnelles; toutefois, il pourra rendre de grands services à tous ceux qui doivent enseigner l'arithmétique politique, même à un degré moins élevé. Le soin avec lequel de nombreux exercices y sont résolus, en fait un livre utile à tous ceux qui étudient cette branche sans le secours d'un professeur.

S. DUMAS (Berne).

D.-E. SMITH and L.-Ch. KARPINSKI. — **The Hindu-Arabic Numerals.** — 1 vol. relié in-8°, IV-160 p.; Boston and London, Ginn and Co, 1911.

Les auteurs qui se sont fait connaître dans l'histoire des mathématiques par différents travaux de valeur, nous présentent dans ce petit livre une vue d'ensemble sur le développement et la propagation de notre système de chiffres. Ils s'occupent dans les huit chapitres de l'ouvrage de la question quelque peu obscure de l'apparition des chiffres, probablement en Inde;

des plus anciennes formes des chiffres, sans et avec valeur de position; du symbole pour zéro; de la question de savoir si Boëthius connaissait l'ancienne forme des chiffres indiens, connus plus tard des Arabes occidentaux sous le nom de chiffres de Ghobâr; du développement des chiffres sous les Arabes et de leur introduction et propagation en Europe.

Les maîtres, les étudiants en mathématiques et d'une façon générale toutes les personnes qui s'intéressent à cette invention si grandiose et pourtant si simple trouveront dans ce livre tous les renseignements voulus; quant à ceux qui désirent de plus amples détails, nous les renvoyons aux nombreuses indications bibliographiques fournies par l'ouvrage même sous forme de notes. Ces notes augmentent donc d'une façon sensible l'importance du livre pour celui qui désire s'occuper plus spécialement de l'histoire des mathématiques; mais le texte lui-même, présenté d'une façon claire et élégante, intéressera vivement le non-spécialiste; d'autant plus que les auteurs fournissent à l'occasion d'intéressants renseignements sur la civilisation générale des peuples et des époques dont il est question.

Au point de vue typographique, le livre est excellent; de nombreuses formes de chiffres donnent au lecteur une idée claire du développement progressif de notre système de chiffres jusqu'à l'époque actuelle.

En ce qui concerne l'origine et la propagation des chiffres hindous en Arabie et en Europe, les opinions sont assez variées, et les auteurs ont bien fait de traiter la question objectivement, ils ne se prononcent d'une manière décisive ni pour l'une ni pour l'autre, ce qui du reste serait un peu osé, étant donné l'état actuel de la question. Cependant il est une de ces opinions que les auteurs auraient pu combattre plus vigoureusement, à savoir l'avis de Wœpcke qui prétend que les anciennes formes de chiffres arabes, les chiffres du Ghobâr (poussière) étaient déjà connues en Espagne avant l'invasion arabe. Il serait trop long de citer tous les motifs qui s'élèvent contre cette affirmation. Contentons-nous de citer ce qui suit :

En 662 on connaissait déjà en Syrie et en Mésopotamie la manière d'écrire les nombres des Hindous à l'aide des neuf chiffres et du zéro (voir F. NAU, La plus ancienne mention orientale des chiffres indiens, au *Journal asiatique*, X^e série, T. 16, p. 225); ne serait-il pas possible que les Omayyades de Damas, la capitale des Califes de 661 à 740, aient transporté en Espagne les chiffres de Ghobâr, alors que les chiffres arabes orientaux auraient été utilisés à Bagdad par les Abbassides par opposition aux Omayyades qu'ils détestaient?

Nous devons encore signaler quelques erreurs qu'il faudra rectifier dans une seconde édition.

P. 65-66 : El-Hassâr ne signifie pas « the arithmetician ». Voir *Biblioth. mathem.* 13 (2), p. 87.

P. 93, note 4, il faut écrire : « English edit., p. 134. » Le volume sur les chiffres hindous est mentionné dans mes « Nachträge » (p. 171).

P. 96 : En ce qui concerne l'affirmation : « As a matter of fact... » les auteurs ne donnent aucune indication.

P. 98 : Les auteurs disent ici : « We thus have the numerals in Arabia in two forms : one the form now used there, and the other the one used by Al-Khowârazmî. » D'où les auteurs connaissent-ils les formes de chiffres que Al-Khowârazmî a employées dans son arithmétique? Son œuvre n'existe plus en langue arabe, comme du reste malheureusement les autres écrits arithmétiques des Arabes du IX^e siècle. Mais même si l'on suppose que ces

écrits existent encore sous forme de transcriptions plus récentes, qui nous garantirait que les transpositeurs n'ont pas remplacé les formes de chiffres primitives par celles de leur temps?

P. 113 : Les auteurs disent que Avicenne est un des hommes qui ont illustré l'Espagne; mais Avicenne vivait dans l'Extrême Orient comme les auteurs le disent eux-mêmes, p. 74.

Ibid. L'astronome arabe-espagnol cité à cet endroit ainsi que dans l'index ne s'appelle pas « Gerber » mais « Geber » (Djâbir).

Ibid. A la place d'« Abû Roshd » il faut mettre « Ibn Roshd ».

P. 120, note 1 : Il est très douteux que « Helceph » provienne de el-qeif, ce n'est que l'avis de M. Rodet.

P. 138. Le nombre 888 doit être remplacé par 987.

H. SUTER (Zurich).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Annali di Matematica. Directeurs : L. BIANCHI, U. DINI, G. JUNG, C. SEGRE. Série III, t. XVIII. — Rebeschini di Turati e C., Milan.

Fascicule 1. — BIANCHI : Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche. — E. E. LEVI : Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse.

Fasc. 2 et 3. — TORELLI : Sulla postulazione di una varietà e sui moduli di forme algebriche. — TONELLI : Sulle derivate di funzioni analitiche della forma $\sum a_n(x)x^n$. — DINI : Studi sulle equazioni differenziali lineari in relazione ai loro integrali normali, pel caso di alcune equazione del 2° ordine. Polinomii integrali. — BIANCHI : Sopra le deformazioni isogonali delle superficie a curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica.

Annals of Mathematics, published under the Auspices of Harvard University. Second Series, vol. XII 1910-1911. — Cambridge, Mass. E. U.

Nos 1 et 2. — F.-R. MOULTON : The Straight Line Solutions of the Problem of n Bodies. — M. BOCHER : On Semi-Analytic Functions of Two Variables. — J. BERRY : Some Theorems Concerning Systems of Linear Partial Differential Expressions. — J.-L. COOLIDGE : Some Circles Associated with Concyelic Points. — R.-E. GLEASON : On a Method for the Summation of Series. — S. EPSTEEN : Rationality Groups in Prescribed Domains. — W.-J. RISLEY : Envelopes of One-Parameter Families of Plane Curves.

Nos 3 et 4. — G. D. BIRKHOFF : On the Solutions of Ordinary Linear Homogeneous Differential Equations of the Third Order. — W. E. BYERLY : Approximate Representation. — L. E. DICKSON : Note on Cubic Equations and Congruences. — G. R. DINES : The Harmonics of a Stretched String Vibrating in a Resisting Medium. — C. A. NOBLE : Characteristics of Two Partial Differential Equation of Order One. — C. S. SLICHTER : The Mixing Effect of Surface Waves. — S. EPSTEEN : The Differential Equation of the