

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES SOMMES DE puissances distinctes de nombres
POLYGONAUX DE n COTÉS ÉGALES A UNE puissance
D'UN NOMBRE POLYGONAL DE n COTÉS

Autor: Barbette, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14280>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LES SOMMES DE $p^{\text{ièmes}}$ PUISSANCES DISTINCTES
DE NOMBRES POLYGONAUX DE n CÔTÉS
ÉGALES A UNE $p^{\text{ième}}$ PUISSANCE
D'UN NOMBRE POLYGONAL DE n CÔTÉS

Soit n_x le $x^{\text{ième}}$ nombre polygonal de n côtés, en sorte que

$$n_x \equiv \frac{1}{2}x[(n-2)x + 4 - n]$$

et par suite $2_x \equiv x$; si $S_{p,x}^{(n)}$ représente la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres polygonaux de n côtés et $S_{p,x}$ la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres entiers, on trouve¹

$$S_{p,x}^{(n)} \Omega \frac{1}{2^p} S_{p,x} [(n-2)S_{0,p} + (4-n)]^p,$$

égalité dans laquelle $S_{p,x}^{(n)}$ est du $(2p+1)^{\text{ième}}$ degré en x . Nous passons du signe Ω au signe $=$, après développement, en convenant d'ajouter les exposants de $S_{0,x}$ à son premier indice 0 et en admettant que $S_{\beta,x} \times S_{\gamma,x} = S_{\beta+\gamma,x}$.

Supposons maintenant qu'une somme de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes des nombres polygonaux de n côtés puisse être une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre polygonal de n côtés, et considérons l'identité

$$n_{x-\alpha_1}^p + n_{x-\alpha_2}^p + \dots + n_{x-\alpha_m}^p + n_x^p = n_{x+\alpha}^p \quad (1)$$

¹ Les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance. E. BARBETTE, page 148. Editeur: Gauthier-Villars, Paris; prix: Fr. 12,50.

polygonaux de n côtés soit un nombre polygonal de n côtés, il faut et il suffit que l'on ait trois conditions distinctes; il s'ensuit que l'égalité

$$n_{x-\alpha} + n_x = n_{x+\alpha} \quad (2)$$

peut exister: en effet, le nombre x étant donné, deux des trois conditions précitées permettront de déterminer les couples de valeurs correspondantes de α_1 et α ; le nombre de solutions sera limité, α devant satisfaire à l'inégalité $S_{1,x}^{(n)} \geq n_{x+\alpha}$. Et si l'un de ces couples transforme la troisième condition en identité, il existera une relation de la forme (2). Nous avons montré, dans notre étude sur les $p^{\text{ièmes}}$ puissances (page 153) que de telles sommes existent.

Observation. — Quoique les problèmes qui vont suivre s'appliquent aux $p^{\text{ièmes}}$ puissances pour toute valeur de p , nous n'examinerons dans nos exemples que l'hypothèse $p = 1$.

Problème I. — *Quelles sont toutes les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes de nombres polygonaux de n côtés, dont la plus grande est n_x^p , égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre polygonal de n côtés?*

Solution. — Soit

$$n_{x+h}^p \leq S_{p,x}^{(n)} < n_{x+h+1}^p .$$

L'égalité $S_{p,x}^{(n)} = n_{x+h}^p$, si elle existe, fournit une première solution

$$n_1^p + n_2^p + n_3^p + \dots + n_x^p = n_{x+h}^p .$$

Posons

$$S_{p,x}^{(n)} = n_{x+\alpha}^p + [S_{p,x}^{(n)} - n_{x+\alpha}^p] , \quad (3)$$

α variant de 1 à h , puis transformons le crochet par différences successives en une somme de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes de nombres polygonaux de n côtés, si possible, dont la plus grande ne dépasse pas n_{x-1}^p , mais peut être moindre: en supprimant de part et d'autre de l'égalité (3) ainsi transformée, les parties communes, nous obtiendrons autant de solutions qu'il existera de sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à ce crochet; il n'y en aura pas d'autre.

Sommes de nombres triangulaires distincts, dont le plus grand est 3_6 ou 21, égales à un nombre triangulaire :

$$S_{1,6}^{(3)} = 56 .$$

$$1^{\circ} \quad 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 28 + 15 + 10 + 3$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 6 + 21 = 28 \quad \text{ou} \quad 3_1 + 3_3 + 3_6 = 3_7 ;$$

$$2^{\circ} \quad 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 36 + 10 + 6 + 3 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 15 + 21 = 36 \quad \text{ou} \quad 3_5 + 3_6 = 3_8 ;$$

$$3^{\circ} \quad 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 45 + 10 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 3 + 6 + 15 + 21 = 45 \quad \text{ou} \quad 3_2 + 3_3 + 3_5 + 3_6 = 3_9 ;$$

$$4^{\circ} \quad 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 55 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 55 \quad \text{ou} \quad 3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_5 + 3_6 = 3_{10} .$$

Sommes de nombres carrés distincts, dont le plus grand est 4_8 ou 64, égales à un nombre carré :

$$S_{1,8}^{(4)} = 204 .$$

$$1^{\circ} \quad 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$$

$$= 204 = 81 + 49 + 36 + 25 + 9 + 4$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 16 + 64 = 81 \quad \text{ou} \quad 4_1 + 4_2 + 4_8 = 4_9 ;$$

$$2^{\circ} \quad 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$$

$$= 204 = 100 + 49 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 36 + 64 = 100 \quad \text{ou} \quad 4_6 + 4_8 = 4_{10} ;$$

$$3^{\circ} \quad 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$$

$$= 204 = 121 + 49 + 25 + 9$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 4 + 16 + 36 + 64 = 121 \quad \text{ou} \quad 4_1 + 4_2 + 4_4 + 4_6 + 4_8 = 4_{11} ;$$

$$4^{\circ} \quad 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$$

$$= 204 = 169 + 25 + 9 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 4 + 16 + 36 + 49 + 64 = 169 \quad \text{ou} \quad 4_2 + 4_4 + 4_6 + 4_7 + 4_8 = 4_{13} .$$

Sommes de nombres pentagonaux distincts, dont le plus grand est 5_9 ou 117, égales à un nombre pentagonal :

$$S_{1,9}^{(5)} = 405 .$$

$$1^{\circ} \quad 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + 70 + 92 + 117 \\ = 405 = 145 + 92 + 70 + 51 + 35 \\ + 12$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 5 + 22 + 117 = 145 \text{ ou } 5_1 + 5_2 + 5_4 + 5_9 = 5_{10} ;$$

$$2^{\circ} \quad 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + 70 + 92 + 117 \\ = 405 = 210 + 92 + 51 + 35 + 12 \\ + 5$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 22 + 70 + 117 = 210 \text{ ou } 5_1 + 5_4 + 5_7 + 5_9 = 5_{12} ;$$

$$3^{\circ} \quad 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + 70 + 92 + 117 \\ = 405 = 210 + 70 + 51 + 35 + 22 \\ + 12 + 5$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 92 + 117 = 210 \text{ ou } 5_1 + 5_8 + 5_9 = 5_{12} ;$$

$$4^{\circ} \quad 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + 70 + 92 + 117 \\ = 405 = 287 + 70 + 35 + 12 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 5 + 12 + 51 + 92 + 117 = 287 \text{ ou } 5_2 + 5_4 + 5_6 + 5_8 + 5_9 \\ = 5_{14} ;$$

$$5^{\circ} \quad 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + 70 + 92 + 117 \\ = 405 = 330 + 70 + 5$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 12 + 22 + 35 + 51 + 92 + 117 = 330 \text{ ou } 5_1 + 5_3 + 5_4 + 5_5 + 5_6 + 5_8 \\ + 5_9 = 5_{15} ;$$

$$6^{\circ} \quad 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + 70 + 92 + 117 \\ = 405 = 330 + 35 + 22 + 12 + 5 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 51 + 70 + 92 + 117 = 330 \text{ ou } 5_6 + 5_7 + 5_8 + 5_9 = 5_{15} .$$

Sommes de nombres hexagonaux distincts, dont le plus grand est 6_8 ou 120, égales à un nombre hexagonal :

$$S_{1,8}^{(6)} = 372 .$$

Le problème n'admet que la solution donnée par l'identité

$$1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 = 372 = 231 + 91 + 28 + 15 + 6 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 45 + 66 + 120 = 231 \text{ ou } 6_5 + 6_6 + 6_8 = 6_{11} .$$

Problème II. — *Quelles sont toutes les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes de nombres polygonaux de n côtés, égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance donnée n_q^p d'un nombre polygonal de n côtés ?*

Solution. — Soit

$$S_{p, x-1}^{(n)} < n_q^p \leq S_{p, x}^{(n)}.$$

Calculons successivement

$$S_{p, x}^{(n)} ; \quad S_{p, x+1}^{(n)} ; \quad S_{p, x+2}^{(n)} ; \quad \dots ; \quad S_{p, q-1}^{(n)} ;$$

puis transformons chacun des résultats obtenus en sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes de nombres polygonaux de n côtés dont la plus grande est n_q^p et dont toutes les autres sont moindres respectivement que

$$n_x^p ; \quad n_{x+1}^p ; \quad n_{x+2}^p ; \quad \dots ; \quad n_{q-1}^p.$$

En supprimant des deux membres des égalités ainsi transformées, les termes communs, nous formerons toutes les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à la $p^{\text{ième}}$ puissance donnée n_q^p .

Sommes de nombres triangulaires distincts égales au nombre triangulaire 3_{10} ou 55 :

$$35 < 55 < 56 \quad \text{ou} \quad S_{1,5}^{(3)} < 3_{10} < S_{1,6}^{(3)} ;$$

$$S_{1,6}^{(3)} = 56 ; \quad S_{1,7}^{(3)} = 84 ; \quad S_{1,8}^{(3)} = 120 ; \quad S_{1,9}^{(3)} = 165 .$$

$$1^{\circ} \quad S_{1,6}^{(3)} \quad \text{ou} \quad 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 \\ = 56 = 55 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 55 \quad \text{ou} \quad 3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_5 + 3_6 = 3_{10} ;$$

$$2^{\circ} \quad S_{1,7}^{(3)} \quad \text{ou} \quad 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 \\ = 84 = 55 + 15 + 10 + 3 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 6 + 21 + 28 = 55 \quad \text{ou} \quad 3_3 + 3_6 + 3_7 = 3_{10} ;$$

$$3^{\circ} \quad S_{1,8}^{(3)} \quad \text{ou} \quad 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 \\ = 120 = 55 + 28 + 21 + 15 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 3 + 6 + 10 + 36 = 55 \quad \text{ou} \quad 3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_8 = 3_{10} ;$$

$$S_{1,8}^{(3)} \quad \text{ou} \quad 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 \\ = 120 = 55 + 28 + 21 + 10 + 6$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 3 + 15 + 36 = 55 \quad \text{ou} \quad 3_1 + 3_2 + 3_5 + 3_8 = 3_{10} ;$$

$$4^o \quad S_{1,9}^{(3)} \text{ ou } 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 \\ = 165 = 55 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 3 + 6 + 45 = 55 \text{ ou } 3_1 + 3_2 + 3_3 + 3_9 = 3_{10} ;$$

$$S_{1,9}^{(3)} \text{ ou } 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 \\ = 165 = 55 + 36 + 28 + 21 + 15 + 6 + 3$$

$$\text{d'où} \quad 10 + 45 = 55 \text{ ou } 3_4 + 3_9 = 3_{10} . \quad + 1$$

Sommes de nombres carrés distincts égales au nombre carré 4_{11} ou 121 :

$$91 < 121 < 140 \quad \text{ou} \quad S_{1,6}^{(4)} < 4_{11} < S_{1,7}^{(4)} ;$$

$$S_{1,7}^{(4)} = 140 ; \quad S_{1,8}^{(4)} = 204 ; \quad S_{1,9}^{(4)} = 285 ; \quad S_{1,10}^{(4)} = 385 .$$

$$1^o \quad S_{1,7}^{(4)} \text{ ne fournit aucune solution ;}$$

$$2^o \quad S_{1,8}^{(4)} \text{ ou } 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 \\ = 204 = 121 + 49 + 25 + 9$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 4 + 16 + 36 + 64 = 121 \text{ ou } 4_1 + 4_2 + 4_4 + 4_6 + 4_8 = 4_{11} ;$$

$$3^o \quad S_{1,9}^{(4)} \text{ ou } 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 \\ = 285 = 121 + 64 + 49 + 25 + 16 + 9$$

$$\text{d'où} \quad 4 + 36 + 81 = 121 \text{ ou } 4_2 + 4_6 + 4_9 = 4_{11} ; \quad + 1$$

$$4^o \quad S_{1,10}^{(4)} \text{ ou } 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 \\ = 385 = 121 + 81 + 64 + 49 + 36 + 25 \\ + 9$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 4 + 16 + 100 = 121 \text{ ou } 4_1 + 4_2 + 4_4 + 4_{10} = 4_{11} .$$

Sommes de nombres pentagonaux distincts égales au nombre pentagonal 5_8 ou 92 :

$$75 < 92 < 126 \quad \text{ou} \quad S_{1,5}^{(5)} < 5_8 < S_{1,6}^{(5)} ;$$

$$S_{1,6}^{(5)} = 126 ; \quad S_{1,7}^{(5)} = 196 .$$

$$1^o \quad S_{1,6}^{(5)} \text{ ou } 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 = 126 = 92 + 22 + 12$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 5 + 35 + 51 = 92 \text{ ou } 5_1 + 5_2 + 5_5 + 5_8 = 5_8 ;$$

$$2^o \quad S_{1,7}^{(5)} \text{ ou } 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + 70 \\ = 196 = 92 + 51 + 35 + 12 + 5 + 1$$

$$\text{d'où} \quad 22 + 70 = 92 \text{ ou } 5_4 + 5_7 = 5_8 .$$

Sommes de nombres hexagonaux distincts égales au nombre hexagonal 6_{13} ou 325 :

$$252 < 325 < 372 \quad \text{ou} \quad S_{1,7}^{(6)} < 6_{13} < S_{1,8}^{(6)} ;$$

$$S_{1,8}^{(6)} = 372 ; \quad S_{1,9}^{(6)} = 525 ; \quad S_{1,10}^{(6)} = 715 ; \quad S_{1,11}^{(6)} = 946 ; \quad S_{1,12}^{(6)} = 1222 .$$

1° $S_{1,8}^{(6)}$ ne fournit pas de solution ;

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad S_{1,9}^{(6)} \quad \text{ou} \quad 1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 \\ = 525 = 325 + 120 + 45 + 28 + 6 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad 15 + 66 + 91 + 153 = 325 \quad \text{ou} \quad 6_3 + 6_6 + 6_7 + 6_9 = 6_{13} ;$$

$$\begin{aligned} S_{1,9}^{(6)} \quad \text{ou} \quad 1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 \\ = 525 = 325 + 91 + 66 + 28 + 15 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 6 + 45 + 120 + 153 = 325 \quad \text{ou} \quad 6_1 + 6_2 + 6_5 + 6_8 + 6_9 = 6_{13} ;$$

$$\begin{aligned} 3^\circ \quad S_{1,10}^{(6)} \quad \text{ou} \quad 1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 + 190 \\ = 715 = 325 + 153 + 120 + 66 + 45 + 6 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad 1 + 15 + 28 + 91 + 190 = 325 \quad \text{ou} \quad 6_1 + 6_3 + 6_4 + 6_7 + 6_{10} = 6_{13} ;$$

$$\begin{aligned} S_{1,10}^{(6)} \quad \text{ou} \quad 1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 + 190 \\ = 715 = 325 + 153 + 91 + 66 + 45 + 28 \\ + 6 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad 15 + 120 + 190 = 325 \quad \text{ou} \quad 6_3 + 6_8 + 6_{10} = 6_{13} ;$$

$$\begin{aligned} 4^\circ \quad S_{1,11}^{(6)} \quad \text{ou} \quad 1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 + 190 + 231 \\ = 946 = 325 + 190 + 153 + 120 + 91 \\ + 66 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad 6 + 15 + 28 + 45 + 231 = 325 \quad \text{ou} \quad 6_2 + 6_3 + 6_4 + 6_5 + 6_{11} = 6_{13} ;$$

$$\begin{aligned} S_{1,11}^{(6)} \quad \text{ou} \quad 1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 + 190 + 231 \\ = 946 = 325 + 190 + 153 + 120 + 91 \\ + 45 + 15 + 6 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad 28 + 66 + 231 = 325 \quad \text{ou} \quad 6_4 + 6_6 + 6_{11} = 6_{13} ;$$

$$\begin{aligned} 5^\circ \quad S_{1,12}^{(6)} \quad \text{ou} \quad 1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 + 190 + 231 + 276 \\ = 1222 = 325 + 231 + 190 + 153 + 120 \\ + 91 + 66 + 45 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad 6 + 15 + 28 + 276 = 325 \quad \text{ou} \quad 6_2 + 6_3 + 6_4 + 6_{12} = 6_{13} .$$

Problème III. — *Quelles sont les sommes de $p^{\text{ième}}$ puissances consécutives de nombres polygonaux de n côtés égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre polygonal de n côtés ?*

Solution. — Considérons un damier d'un nombre illimité de cases et écrivons en diagonale, de haut en bas et de gauche à droite, la suite

$$n_1^p, n_2^p, n_3^p, \dots, n_x^p, \dots$$

Ajoutons au nombre n_x^p de cette diagonale, le nombre n_{x-1}^p qui le précède; au résultat $n_x^p + n_{x-1}^p$, ajoutons le nombre n_{x-2}^p qui précède n_{x-1}^p ; au résultat $n_x^p + n_{x-1}^p + n_{x-2}^p$, ajoutons le nombre n_{x-3}^p qui précède n_{x-2}^p ; et ainsi de suite.

Ecrivons les sommes obtenues successivement dans les cases qui suivent la verticale passant par n_x^p , de bas en haut: dans la $x^{\text{ième}}$ case, c'est-à-dire dans la case qui appartient à la première bande horizontale du damier, se trouvera le nombre représenté par la somme

$$n_x^p + n_{x-1}^p + n_{x-2}^p + \dots + n_1^p \equiv S_{p,x}^{(n)}.$$

Tout nombre N de ce tableau appartient à l'intersection d'une bande horizontale qui, considérée de gauche à droite, commence par n_{y+1}^p et d'une bande verticale qui, considérée de bas en haut, commence par n_x^p ; à ce nombre correspond l'égalité

$$n_{y+1}^p + n_{y+2}^p + \dots + n_x^p = N.$$

Lorsque N sera une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre polygonal de n côtés, l'égalité qui précède donnera une solution du problème.

Observons, en passant, que tout nombre N du damier est égal à la différence $S_{p,x}^{(n)} - S_{p,y}^{(n)}$.

Sommes de nombres triangulaires consécutifs égales à un nombre triangulaire :

$$\begin{aligned}
 3_1 + 3_2 + 3_3 &= 3_4 ; \\
 3_5 + 3_6 &= 3_8 ; \\
 3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_5 + 3_6 &= 3_{10} ; \\
 3_1 + 3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_5 + 3_6 + 3_7 + 3_8 &= 3_{15} ; \\
 3_8 + 3_9 + 3_{10} &= 3_{16} ; \\
 3_4 + 3_5 + 3_6 + \dots + 3_{10} &= 3_{20} ; \\
 3_4 + 3_5 + 3_6 + \dots + 3_{11} &= 3_{23} ; \\
 3_5 + 3_6 + 3_7 + \dots + 3_{13} &= 3_{29} ; \\
 3_3 + 3_4 + 3_5 + \dots + 3_{19} &= 3_{51} ; \\
 3_{13} + 3_{14} + 3_{15} + \dots + 3_{20} &= 3_{48} ; \\
 3_1 + 3_2 + 3_3 + \dots + 3_{20} &= 3_{55} ; \\
 3_{12} + 3_{13} + 3_{14} + \dots + 3_{21} &= 3_{54} ; \\
 3_2 + 3_3 + 3_4 + \dots + 3_{21} &= 3_{59} ; \\
 3_{11} + 3_{12} + 3_{13} + \dots + 3_{23} &= 3_{64} ; \\
 3_{14} + 3_{15} + 3_{16} + \dots + 3_{24} &= 3_{65} ; \\
 3_8 + 3_9 + 3_{10} + \dots + 3_{27} &= 3_{84} ; \\
 3_{21} + 3_{22} + 3_{23} + \dots + 3_{31} &= 3_{88} ; \\
 3_4 + 3_5 + 3_6 + \dots + 3_{30} &= 3_{99} ; \\
 \dots &
 \end{aligned}$$

Sommes de nombres carrés consécutifs égales à un nombre carré :

$$\begin{aligned}
 4_3 + 4_4 &= 4_5 ; \\
 4_{20} + 4_{21} &= 4_{29} ; \\
 4_1 + 4_2 + 4_3 + \dots + 4_{24} &= 4_{70} ; \\
 4_{18} + 4_{19} + 4_{20} + \dots + 4_{28} &= 4_{77} ; \\
 4_7 + 4_8 + 4_9 + \dots + 4_{29} &= 4_{92} ; \\
 4_9 + 4_{10} + 4_{11} + \dots + 4_{32} &= 4_{106} ; \\
 4_{17} + 4_{18} + 4_{19} + \dots + 4_{39} &= 4_{138} ; \\
 4_7 + 4_8 + 4_9 + \dots + 4_{39} &= 4_{143} ; \\
 4_{20} + 4_{21} + 4_{22} + \dots + 4_{43} &= 4_{158} ; \\
 4_{38} + 4_{39} + 4_{40} + \dots + 4_{48} &= 4_{143} ; \\
 \dots &
 \end{aligned}$$

Sommes de nombres pentagonaux consécutifs égales à un nombre pentagonal :

$$\begin{aligned}
 5_2 + 5_3 + 5_4 + 5_5 + 5_6 + 5_7 + 5_8 &= 5_{14} ; \\
 &5_6 + 5_7 + 5_8 + 5_9 = 5_{15} ; \\
 5_4 + 5_5 + 5_6 + \dots + 5_{10} &= 5_{19} ; \\
 5_6 + 5_7 + 5_8 + \dots + 5_{11} &= 5_{21} ; \\
 5_8 + 5_9 + 5_{10} + \dots + 5_{18} &= 5_{44} ; \\
 5_3 + 5_4 + 5_5 + \dots + 5_{21} &= 5_{47} ; \\
 5_8 + 5_9 + 5_{10} + \dots + 5_{22} &= 5_{60} ; \\
 &5_{25} + 5_{26} = 5_{36} ; \\
 5_{12} + 5_{13} + 5_{14} + \dots + 5_{26} &= 5_{75} ; \\
 5_{10} + 5_{11} + 5_{12} + \dots + 5_{27} &= 5_{81} ; \\
 \dots &\dots
 \end{aligned}$$

Sommes de nombres hexagonaux consécutifs égales à un nombre hexagonal :

$$\begin{aligned}
 6_1 + 6_2 + 6_3 + \dots + 6_{11} &= 6_{22} ; \\
 6_3 + 6_4 + 6_5 + \dots + 6_{13} &= 6_{28} ; \\
 &6_{13} + 6_{14} = 6_{19} ; \\
 6_{15} + 6_{16} + 6_{17} + \dots + 6_{24} &= 6_{60} ; \\
 \dots &\dots
 \end{aligned}$$

Observation. — En ce qui concerne les nombres triangulaires, la forme

$$S_{2,x}^{(3)} = \frac{1}{60} x(x+1)(x+2)(3x^2+6x+1)$$

fait prévoir qu'une somme de carrés de deux nombres triangulaires ne peut être le carré d'un triangulaire¹; et puisque, d'après le théorème de Fermat, une somme de deux $p^{\text{ièmes}}$ puissances ne peut être une $p^{\text{ième}}$ puissance lorsque p est supérieur à 2, il en résulterait le théorème suivant :

Une somme de deux $p^{\text{ièmes}}$ puissances de nombres triangulaires ne peut être une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre triangulaire lorsque p est supérieur à l'unité.

¹ A consulter : *Le dernier théorème de Fermat* par E. BARBETTE, (Editeur : Gauthier-Villars, Paris ; prix : Fr. 1,50.)

Une somme de deux carrés de nombres triangulaires peut cependant être un carré, mais non le carré d'un triangulaire :

$$\begin{aligned}
 21^2 + 28^2 &= 35^2 \quad \text{ou} \quad 3_6^2 + 3_7^2 = 35^2 ; & 15^2 + 36^2 &= 39^2 \quad \text{ou} \quad 3_5^2 + 3_8^2 = 39^2 ; \\
 28^2 + 45^2 &= 53^2 \quad \text{ou} \quad 3_7^2 + 3_9^2 = 53^2 ; & 36^2 + 105^2 &= 111^2 \quad \text{ou} \quad 3_9^2 + 3_{14}^2 = 111^2 ; \dots
 \end{aligned}$$

En d'autres termes, l'équation

$$\left[\frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_1 + 1)}{2} \right]^p + \left[\frac{x(x + 1)}{2} \right]^p = \left[\frac{(x + \alpha)(x + \alpha + 1)}{2} \right]^p$$

est impossible en nombres entiers lorsque p est plus grand que 1.

La forme

$$S_{p,x}^{(3)} = x(x + 1)(x + 2)Q_x$$

dans laquelle, lorsque p est plus grand que 1, Q_x représente un polynôme entier du $(2p - 2)^{\text{ième}}$ degré en x , conduit directement à la même conclusion.

La relation

$$S_{2,x}^{(4)} = \frac{1}{30} x(x + 1)(2x + 1)(3x^2 + 3x - 1) ,$$

fait aussi prévoir qu'une somme de carrés de deux nombres carrés ne peut être un carré de carré. Mais des formules

$$S_{2,x}^{(5)} = \frac{1}{60} x(x + 1)(27x^3 + 18x^2 - 13x - 2)$$

et

$$S_{2,x}^{(6)} = \frac{1}{30} x(x + 1)(24x^3 + 6x^2 - 16x + 1) ,$$

nous ne pouvons conclure qu'une somme de deux carrés de nombres pentagonaux ou hexagonaux ne peut être respectivement le carré d'un nombre pentagonal ou hexagonal ; il est bon d'observer cependant que nous n'affirmons pas pour cela qu'une telle égalité existe.

E. BARBETTE (Liège).