

LES RECTRICES. ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE PHYSIQUE

Autor(en): **Butavand, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1912)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14283>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

de points assujettis à rester sur la surface, tout en se dirigeant à chaque instant vers un point fixe. Le plan déterminé par celui-ci et la tangente en un point à la courbe est normal à la surface en ce dernier point. Toutes les courbes qui remplissent cette condition sont les orthogonales des sphériques déterminées dans la surface par des sphères dont le centre est au point fixe. Nous les désignerons, pour abréger, sous le nom de « rectrices ».

On montre que dans toute transformation vectorielle de la surface telle qu'à un rayon vecteur issu du point fixe, en corresponde un autre dans la même direction, dont la grandeur soit fonction seulement de celle du premier, la qualité de la rectrice se conserve. Les transformations : inverse, homothétique, conchoïdale etc..., ainsi que les combinaisons diverses de ces transformations conservent donc la rectrice.

Dans la transformation par polaires réciproques, aux sphériques correspondent les enveloppes des plans tangents situés à une même distance du point fixe. A une rectrice correspond l'enveloppe d'un plan tangent qui se rapproche du point fixe par la voie la plus courte à chaque instant. On voit ainsi que dans la théorie géométrique de Poincaré, du mouvement d'un solide autour d'un point fixe, la développable circonscrite à l'ellipsoïde le long de la polhodie n'est autre que la polaire réciproque d'une rectrice.

2. Les rectrices de la surface de l'onde. — Une autre transformation est intéressante à examiner. On considère les sections planes passant par un point fixe ; de celui-ci on mène les normales à la courbe de section ; sur la perpendiculaire au plan de section par le point fixe, et à partir de celui-ci, on porte une longueur qui est fonction uniquement de la longueur d'une des normales. Le point ainsi déterminé décrit une certaine surface quand le plan de section varie. Le plan défini par ce point et la normale correspondante dans la section est normal à la surface ainsi décrite, au point considéré. Les surfaces apsidales se rattachent au cas général qui précède.

En particulier, en appliquant la transformation à un ellipsoïde par rapport à son centre, et portant des longueurs égales aux axes de la section, on sait que l'on obtient la surface de l'onde. On en déduit immédiatement que celle-ci a deux nappes, et que les cônes recteurs de l'une des nappes sont les cônes sphériques de l'autre. Cela se traduit, dans le phénomène de la réfraction des biaxes, par ce fait que sur une même direction les plans déterminés par celle-ci et par les vibrations propagées sont rectangulaires, propriété découverte par Hamilton.

Un cône recteur — ou sphérique — de la surface de l'onde est — on le verrait aisément — le cône complémentaire d'un cône sphérique de l'ellipsoïde générateur. On sait qu'un tel cône est du second ordre et appartient à la famille linéaire définie pour

les cônes — imaginaires — asymptotes de l'ellipsoïde et de la sphère. Les cônes recteurs de la surface de l'onde sont donc du second ordre et forment une famille linéaire tangentielle.

Les courbes isochromatiques sont, comme on le sait, les traces des cônes sphériques de la surface aux différences des rayons vecteurs des deux nappes de la surface de l'onde dans une même direction. Les courbes d'égale intensité, et non plus de même coloration, sont, l'expérience le montre, les orthogonales des précédentes ; ce sont des hyperboles équilatères passant par les traces des deux axes du milieu biréfringent. Ces courbes sont les traces des cônes recteurs de la surface différentielle lesquels constituent aussi une famille de cônes du second ordre. Nous n'insisterons pas sur la question au point de vue géométrique.

3. Applications pratiques des rectrices. — On rencontre les rectrices et les sphériques dans des questions d'ordre très différent. Ainsi en stéréotomie on les trouve dans l'appareillage d'un berceau oblique à tête circulaire. La projection sur le mur de tête des courbes de joint est la trajectoire orthogonale des rectrices planes parallèles au mur de tête, c'est-à-dire des sphériques du berceau ayant leur centre à l'infini dans la direction normale à ce mur. Les courbes de joint sont donc les rectrices du berceau dans cette direction.

En topographie les lignes de plus grande pente, qui correspondent aux hachures, et théoriquement en général au tracé des cours d'eau, sont des rectrices de la surface du sol, les sphériques étant les courbes de niveau, relatives à la direction de la verticale.

4. Les rectrices centrales des quadriques. — Parmi les cas les plus simples, on est conduit à considérer celui des rectrices centrales des quadriques. Ce sont les trajectoires orthogonales des sphériques, et l'on sait que les cônes sphériques sont ici du second ordre. L'équation des cônes recteurs est facile à obtenir. Soit :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

l'équation d'une quadrique à centre. Soit $z = f(xy)$ l'équation cherchée du cône recteur. On aura :

$$Axz'_x + Byz'_y - Cz = 0$$

$$xz'_x + yz'_y - z = 0$$

la première de ces équations exprime que le cône est normal à la quadrique au point xyz , la deuxième exprime que $z = f(xy)$ représente bien un cône. On en déduit :

$$z_x = \frac{C - B}{A - B} \cdot \frac{z}{x}, \quad z_y = \frac{A - C}{A - B} \cdot \frac{z}{y}$$

d'où

$$\frac{z'_x}{z} = \frac{C - B}{A - B} \cdot \frac{1}{x}$$

et, en intégrant :

$$Lz = \frac{C - B}{A - B} Lx + \varphi(y)$$

on aurait de même :

$$Lz = \frac{A - C}{A - B} Ly + \psi(x)$$

on en déduit :

$$x^{C-B} \cdot y^{A-C} \cdot z^{B-A} = k$$

ce qui représente bien un cône puisque :

$$(C - B) + (A - C) + (B - A) \equiv 0 .$$

Réciproquement si l'on donne une équation de la forme :

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = k$$

représentant un cône avec les conditions :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

on posera :

$$\alpha = C - B , \quad \beta = A - C , \quad \gamma = B - A$$

d'où

$$B = C - \alpha , \quad A = C + \beta$$

et l'équation de la quadrique est :

$$(C - \alpha)x^2 + (C + \beta)y^2 + Cz^2 = 1$$

ou encore :

$$C(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x^2 - \beta y^2) = 1 ,$$

ce qui représente un faisceau de quadriques défini par l'intersection d'un cylindre avec une sphère. Dans ce faisceau il y a des cylindres :

$$1^\circ \quad A = 0 , \quad \beta = -C , \quad \alpha = -\beta - B ;$$

$$2^\circ \quad B = 0 , \quad \alpha = C , \quad \beta = A - \alpha ;$$

$$3^\circ \quad C = 0 .$$

On voit ainsi que les hyperboles équilatères de tout ordre, et en particulier les courbes dénommées adiabatiques en physique, de même que les paraboles de tout ordre sont les projections sur un plan parallèle à un plan principal, des rectrices centrales de quadriques.

5. La correspondance logarithmique entre quadriques et cônes recteurs. — Soient

$$(1) \quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \\ A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1 \end{cases}$$

les équations de deux quadriques à centres ayant les mêmes plans principaux. Leurs cônes recteurs ont pour équation :

$$(2) \quad x^\alpha y^\beta z^\gamma = k, \quad x^{\alpha'} y^{\beta'} z^{\gamma'} = k',$$

avec

$$\alpha = C - B, \quad \alpha' = C' - B',$$

$$\beta = A - C, \quad \beta' = A' - C',$$

$$\gamma = B - A, \quad \gamma' = B' - A'.$$

Ajoutons membre à membre les équations (1), il vient :

$$(3) \quad (A + A')x^2 + (B + B')y^2 + (C + C')z^2 = 2,$$

ce qui représente une quadrique ayant les mêmes plans principaux que les deux premières, et passant par leur intersection.

D'autre part, multiplions membre à membre les équations (2), il vient :

$$(4) \quad x^{\alpha+\alpha'} \cdot y^{\beta+\beta'} \cdot z^{\gamma+\gamma'} = kk'.$$

C'est l'équation d'un cône recteur de la quadrique (3). En effet, en posant

$$A + A' = \mathcal{A},$$

$$B + B' = \mathcal{B},$$

$$C + C' = \mathcal{C},$$

on aura

$$\alpha + \alpha' = \mathcal{C} - \mathcal{B},$$

$$\beta + \beta' = \mathcal{A} - \mathcal{C},$$

$$\gamma + \gamma' = \mathcal{B} - \mathcal{A}.$$

On généraliserait facilement, et l'on verrait que si l'on donne n quadriques ayant mêmes plans principaux :

$$\begin{cases} A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 = 1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_nx^2 + B_ny^2 + C_nz^2 = 1, \end{cases}$$

dont les cônes recteurs sont respectivement :

$$\begin{aligned} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} z^{\gamma_1} &= k_1 \\ \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x^{\alpha_n} y^{\beta_n} z^{\gamma_n} &= k_n \end{aligned}$$

la quadrique

$$x^2 \Sigma A + y^2 \Sigma B + z^2 \Sigma C = n$$

a pour cônes recteurs

$$x^{\Sigma \alpha} y^{\Sigma \beta} z^{\Sigma \gamma} = k'$$

c'est-à-dire.

$$\Pi(x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}) = k'.$$

En résumé, on peut dire par abréviation que le produit des cônes recteurs est cône recteur de la somme des quadriques. On peut encore exprimer ceci en un langage symbolique en disant que la quadrique est le logarithme du recteur.

6. Les rectrices et la représentation des phénomènes. — Nous avons rencontré les rectrices dans un certain nombre de faits très divers. On a vu que les phénomènes représentés par des hyperboles équilatères ou des paraboles, se rattachent à la considération des rectrices. Tels sont par exemple : l'évolution isothermique ou adiabatique d'une masse gazeuse, la loi moyenne de variation de l'absorption cathodique et du rayonnement secondaire, etc....

D'autre part on constate aisément que le tracé même d'une rectrice obéit à la loi du moindre effort momentané, c'est-à-dire du maximum d'effet — soit du chemin parcouru vers le pôle — pour le minimum de travail — soit de résistance passive à vaincre.

Nous venons de mettre en évidence une autre propriété des rectrices, qu'il convient de rapprocher des considérations par lesquelles on est amené à exprimer que les causes peuvent être considérées comme les logarithmes des effets.

Admettons que, soit comme symbole, soit par la nature même, le tracé d'une rectrice représente un phénomène ou un fait.

Il est bien clair que la cause correspondra aux deux liaisons qui commandent le mobile : la surface et le point fixe. Quant à l'effet, il est évidemment représenté par la courbe tracée, ou si l'on veut, par le cône recteur. Et alors la relation géométrique que nous avons trouvée dans le cas d'une quadrique devient en quelque sorte la forme représentative concrète de l'aphorisme général rappelé ci-dessus.

Ce qui précède explique pourquoi la considération des rectrices est apte à intervenir dans la représentation des phénomènes, et

il ne sera pas toujours inutile d'y avoir recours. Il se dégage d'ailleurs de ce qui précède, ce fait que les phénomènes simples et fondamentaux correspondent en général au cas des rectrices de quadriques.

On ne doit pas être surpris du rôle ainsi joué par les quadriques à centre, et notamment par l'ellipsoïde. On trouve bien cette surface dans l'étude des phénomènes élastiques autour d'un point : on considère les ellipsoïdes des dilatations et d'élasticité. Cette dernière surface, par une transformation connue donne la surface de l'onde qu'on retrouve dans la théorie des biaxes.

7. La dualité géométrique et les rectrices. — La dualité, qui, par la considération des polaires réciproques fait correspondre un point à un plan et inversement, n'est pas seulement une conception abstraite ; elle n'est pas inapte à intervenir dans les sciences de la matière. Ainsi, à l'œil, organe assimilable à un point, et destiné à scruter la matière et notamment les surfaces qui définissent celle-ci, correspond un organe plan d'un usage différent, mais utile au même but, et destiné à compléter le précédent. Cet organe plan dont le rôle est dit tactile, est constitué par la main, et il est l'apanage des êtres supérieurs comme l'homme et les anthropoïdes. Eux seuls possèdent des organes du tact d'une étendue suffisante pour être considérés comme des plans, ou des assemblages de plans permettant un degré considérable dans la perfection du sens du toucher.

Transformons par polaires réciproques le représentatif rectoriel d'un phénomène à quadrique centrée au pôle. A la quadrique correspond une autre quadrique qui est apte à représenter une cause. Quant à l'effet, qui était représenté par un cône recteur, il sera représenté par la développable circonscrite à la quadrique et dont le cône asymptote est le cône complémentaire du précédent, c'est-à-dire en somme par le cône complémentaire lui-même. Il est d'ailleurs facile de montrer que ce cône complémentaire est aussi un cône recteur de la première quadrique.

En effet, soit $x_0 y_0 z_0$ un point du cône recteur

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = k.$$

La normale par le sommet du cône au plan tangent suivant la génératrice du point $x_0 y_0 z_0$ a pour équations :

$$\frac{x_0 x}{\alpha} = \frac{y_0 y}{\beta} = \frac{z_0 z}{\gamma} = \mu$$

on en déduit :

$$\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\beta}{y}\right)^\beta \cdot \left(\frac{\gamma}{z}\right)^\gamma = \frac{k}{\mu^{\alpha+\beta+\gamma}}$$

comme $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on a :

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \frac{1}{k} \alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma,$$

ce qui représente bien un cône recteur de la première quadrique. La puissance de ce cône est :

$$k' = \frac{1}{k} \alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma.$$

Soit x, y, z le point de la quadrique correspondant à $x_0 y_0 z_0$, on aura :

$$k = x_0^\alpha y_0^\beta z_0^\gamma$$

$$k' = x_1^\alpha y_1^\beta z_1^\gamma$$

d'où :

$$kk' = (x_0 x_1)^\alpha \cdot (y_0 y_1)^\beta \cdot (z_0 z_1)^\gamma = \alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma.$$

Nous avons à peine besoin de faire remarquer que $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_1 z_1$, sont les sommets de la section centrale qu'ils déterminent dans la quadrique.

En résumé, on voit que l'effet, représenté par un cône recteur correspond dans la transformation par dualité à un autre cône recteur de la même quadrique.

Sans chercher à généraliser, nous ferons observer que la surface de l'onde a pour cônes recteurs des cônes du second ordre qui, par dualité, donnent d'autres cônes du second ordre. Aussi bien la surface de l'onde, par polaires réciproques, donne-t-elle une autre surface de l'onde.

8. La matière élastique et le complexe du second ordre. — On définit en résistance des matériaux une surface dite ellipsoïde inverse d'élasticité en chaque point d'un solide. Passant à la limite pour l'étude autour d'un même point, on peut considérer seulement le cône asymptote — imaginaire en l'espèce — de cette surface. Un solide apparaît donc comme une portion d'espace caractérisée en chaque point par un cône du second ordre. C'est précisément là la définition d'un complexe.

Considérons, dans un complexe, la séparation entre les points où le cône est réel et ceux où il est imaginaire. A cette conception correspond la limite — une surface en général — entre la matière réelle et la matière non réalisable. Comme cas particulier, envisageons le cas de la surface de l'onde. Le complexe des droites capables d'un dièdre rectangle circonscrit à un ellipsoïde donné possède en chaque point un cône du second ordre. La surface qui

sépare dans ce cas les deux régions définies ci-dessus est précisément une surface de l'onde.

En un point d'un ellipsoïde E passent deux autres quadriques qui lui sont homofocales : un hyperboloïde à deux nappes et une surface gauche du second ordre : H_2 et H_1 . On sait que les axes du cône du complexe au point considéré sont les normales aux trois quadriques E , H_1 , H_2 . L'arête du cône dégénéré en deux plans en chaque point de la surface de l'onde est normale à celle-ci. Les deux autres axes du cône sont dans le plan tangent à celle-ci ; ils sont précisément tangents, l'un à la rectrice, l'autre à la sphérique en ce point.

On sait d'autre part que la surface de l'onde peut être définie comme le lieu de la quartique intersection des deux quadriques homofocales dont les paramètres sont égaux, mais de signe contraire, l'une des quadriques étant toujours un ellipsoïde E . Si à E on associe la surface gauche H_1 on obtient la nappe intérieure de la surface de l'onde. Avec l'hyperboloïde à deux nappes H_2 on obtient la nappe extérieure.

Les cônes ayant pour sommet le centre et pour directrices ces quartiques sont du second ordre. Ce sont précisément les cônes recteurs pour une nappe et sphériques pour l'autre.

Dans le cas d'un milieu isotrope, le cône est en tous les points constitué par une sphère-point. Dans le cas d'un uniaxe, l'ellipsoïde inverse des élasticités est de révolution. Le cône imaginaire est donc de révolution. Dans le cas d'un biaxe, le cône est à trois axes inégaux ; il a d'ailleurs même orientation et mêmes dimensions en tous les points. Les corps hétérogènes ont en chaque point un cône dont l'orientation et les dimensions varient avec les coordonnées du point.

9. Les lignes de rupture. — Admettons que les coefficients de l'équation du cône varient non seulement avec les coordonnées du sommet, mais dépendent en outre d'une quatrième variable, le temps par exemple. Le cône d'abord imaginaire pourra devenir réel, à ce moment la matière ne sera plus stable : elle tendra à se diviser suivant les génératrices d'un cône. Si l'on considère dans le solide, une surface, celle qui le limite, par exemple, elle va se fendiller suivant des directions régulières. Dans le cas d'une variation lente ce seront les directions des génératrices de contact du cône avec la surface elle-même en chaque point. Il y aura donc en chaque point une direction de rupture. Si au contraire la variation est très rapide, instantanée par exemple, pour arriver à un cône réel, en chaque point il y aura deux directions de rupture qui seront les intersections du cône avec le plan tangent à la surface.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un milieu isotrope, et que la modification du cône du complexe résulte de l'action

exercée par un ébranlement émané d'un point fixe du solide. En chaque point, par symétrie, le cône primitivement isotrope va devenir un cône imaginaire, puis réel, mais toujours de révolution autour du recteur allant de l'origine au sommet. Quand, en un des points de la surface du solide le cône sera devenu tangent à celle-ci, la génératrice de contact sera la tangente à la rectrice en ce point. On en conclut que la rupture progressive de la surface aura lieu suivant les rectrices.

Si, au contraire, la rupture est instantanée, comme dans le cas d'une explosion, il y a deux directions de rupture en chaque point, avec la rectrice et la sphérique pour bissectrices.

Considérons un solide en forme de cône de révolution; admettons que l'ébranlement provienne de son sommet et qu'il se transmette instantanément avec la même intensité à toute distance: les lignes de rupture seront les trajectoires homogonales des génératrices, ce sont des hélices coniques, courbes que l'on trouve dans l'étude du mouvement d'un corpuscule négatif dans un champ d'un seul pôle sud, et qui sont au surplus des géodésiques du cône.

Si, comme surface, on prend un plan passant par le centre d'ébranlement, on voit que les lignes de rupture feront des angles égaux avec les rayons recteurs, ce seront donc des spirales logarithmiques. Ce résultat est bien connu, et on le vérifie expérimentalement dans les sections transversales des bouches à feu.

La détermination des lignes de rupture instantanée donne lieu à une foule de problèmes de géométrie. Le cas d'une sphère est particulièrement intéressant en considérant une section telle que les cônes soient circulaires, égaux et parallèles entre eux (cas d'une extension). On voit que les lignes de rupture font en chaque point un angle constant avec une direction fixe. Ce sont les trajectoires que suivrait un navire dont l'axe ferait un angle constant avec la direction du pôle. On montre facilement que la projection de ces courbes sur le plan perpendiculaire à la direction des axes est une épicycloïde. On peut ainsi trouver sur une carte en projection équatoriale l'angle polaire à observer pour atteindre un point connu en partant d'un point donné.

L'épicycloïde a pour cercle générateur un cercle de rayon égal à $R(1 - \cos \theta)$, R étant le rayon de la sphère et θ le demi-angle au sommet du cône; ce cercle roule sur un cercle dont le rayon est $R \cos \theta$. Toutes les courbes sont extérieures à ce dernier cercle.

Un autre cas intéressant est celui où les cônes ont des axes normaux à un diamètre fixe qu'ils rencontrent. On voit que dans ce cas, au contraire, toutes les courbes sont à l'intérieur du cercle de rayon $R \sin \theta$. En projection sur un plan parallèle aux axes, ces courbes sont des spirales dont on trouverait facilement l'équation différentielle. Elles sont, dans une certaine mesure, réalisées pratiquement à la surface des billes de billard qui sont tournées

sur l'axe même d'une défense en ivoire. On les aperçoit assez nettement. Leur présence est due à ce que l'ivoire est constitué par des couches cylindriques alternées, couches qui, à un moment donné tout au moins, ont eu des résistances différentes, et qui se sont moulées successivement les unes contre les autres. Le milieu n'est donc pas isotrope, et à un moment donné la résistance tangentielle étant de sens contraire à la résistance radiale le cône est devenu réel, des fissures se sont établies et colmatées.

10. **La rectrice chimique.** — On sait que le produit du poids atomique d'un corps par sa chaleur spécifique à l'état solide ou liquide est une quantité sensiblement constante et égale à 6,38, fait qui constitue la loi de Dulong et Petit. Cette loi est traduite par une hyperbole équilatère, qui est comme nous l'avons vu, la projection d'une rectrice de cylindre du second ordre.

Si les poids atomiques sont comptés suivant Ox , et les chaleurs spécifiques suivant Oy , l'équation du cylindre est :

$$y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$$

et le plan $z = \sqrt{2}$ est coupé par les cônes recteurs suivant des hyperboles équilatères.

Considérons la rectrice correspondant à $xy = 6,38 = k$.

Soit $\alpha, \beta, \gamma = \sqrt{2}$, un point de l'hyperbole. Joignons-le à l'origine. Le rayon vecteur de la rectrice est :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

mais :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

d'où :

$$\rho^2 = \frac{z^2}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + 2)$$

or on a :

$$y = \frac{\beta z}{\sqrt{2}}$$

et :

$$z^2 = \frac{2}{\beta^2 + 1}$$

par suite :

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2}{\beta^2 + 1}$$

et comme $\alpha\beta = k$, on a en définitive :

$$(1) \quad \rho^2 = 1 + \alpha^2 \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + k^2}$$

avec $k = 6,38$, ou $k^2 = 40$.

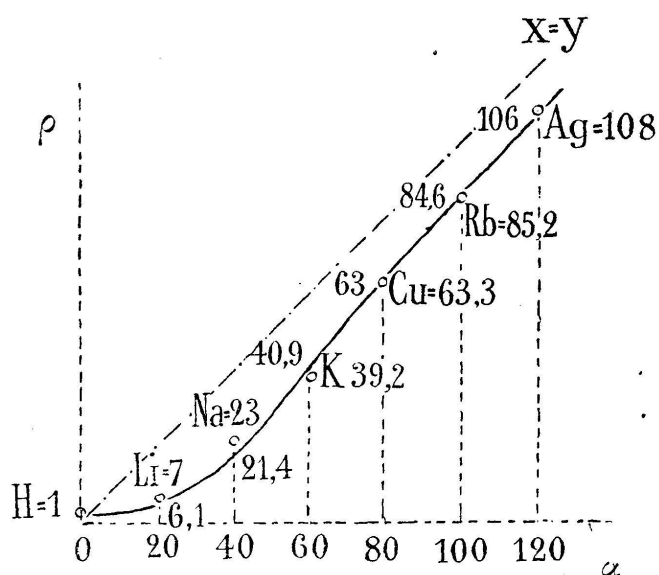
L'équation représente une courbe en ρ, α du 4^{me} ordre, symétrique par rapport à chacun des axes de coordonnées. Nous la considérerons seulement dans l'angle xoy . Elle a pour asymptote la bissectrice des axes, $x = y$. En effet, on vérifie facilement que $\rho - \alpha$ tend vers zéro quand α augmente indéfiniment.

Examinons maintenant le tableau de Mendeleïeff. La série des poids atomiques des corps d'une même famille a des différences premières qui, au début de 15 montent à 25 environ pour redescendre et paraître se fixer autour de 20 ou 22.

Prenons par exemple la famille du Sodium :

$$\begin{aligned} \text{H} = 1, \quad \text{Li} = 7, \quad \text{Na} = 23, \quad \text{K} = 39,2, \quad \text{Cu} = 63,3, \\ \text{Rb} = 85,5, \quad \text{Ag} = 108 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Portons en abscisse des longueurs en progression arithmétique et en ordonnées les poids atomiques. Nous obtenons ainsi des points qui dessinent une courbe présentant une analogie frappante avec la courbe en ρ, α . Dans l'équation (1) donnons à α des valeurs en progression arithmétique avec la raison 20. On obtient les valeurs suivantes de ρ , (fig. 1) :



α	ρ	
0	1	H = 1
20	6,1	Li = 7
40	21,4	Na = 23
60	40,9	K = 39,3
80	63	Cu = 63,3
100	84,6	Rb = 85,3
120	106	Ag = 108
...	...	

Fig. 1.

Si nous considérons que α est proportionnel au rang, et si nous laissons de côté la considération de la chaleur spécifique nous voyons que le poids atomique est le rayon vecteur d'un point de la rectrice $K = 6,38$ et que l'abscisse de la projection centrale de ce point sur le plan $z = \sqrt{2}$ est le rang du corps. (fig. 2.)

Les corps des autres familles se placent par interpolation de huitième en huitième. On donnera à α les valeurs suivantes :

$$\text{Glucinium} \quad \alpha + \frac{1}{8} 20$$

$$\text{Bore} \quad \alpha + \frac{2}{8} 20$$

$$\text{Carbone} \quad \alpha + \frac{3}{8} 20$$

$$\text{Azote} \quad \alpha + \frac{4}{8} 20$$

$$\text{Oxygène} \quad \alpha + \frac{5}{8} 20$$

$$\text{Fluor.} \quad \alpha + \frac{6}{8} 20$$

$$\text{Néon} \quad \alpha + \frac{7}{8} 20$$

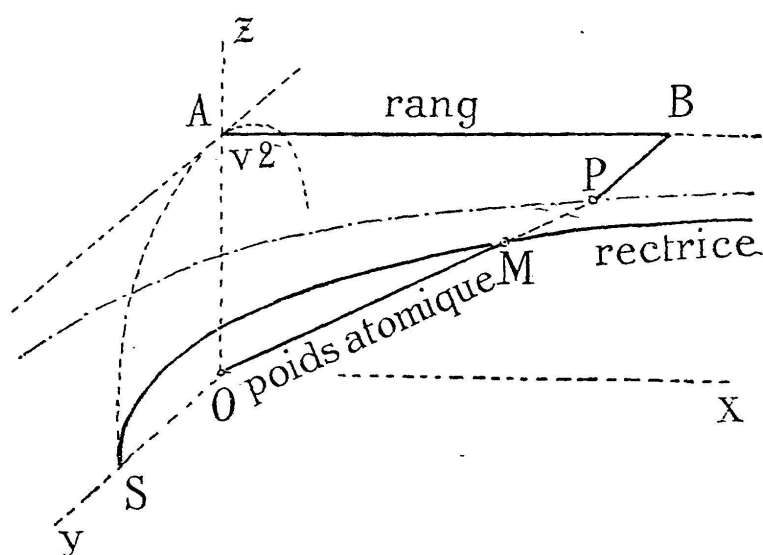


Fig 2.

en faisant $\alpha = 0$ on obtient des corps entre l'hydrogène et le lithium. Ces corps ne sont pas connus, sauf un seul, l'hélium, homologue inférieur du néon. Son poids atomique est donné par la formule

$$\rho^2 = 1 + \alpha^2 \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + k^2}$$

où il faut faire $\alpha = \frac{7}{8} 20$.

on obtient $\rho = 4,5$. L'expérience donne pour le poids atomique de l'hélium la valeur 4. L'insertion de ce corps sur la courbe se fait donc dans des conditions d'approximation comparables à celles des autres corps.

11 La loi cissoïdale atomique. — La formule

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2}{\beta^2 + 1}$$

peut s'écrire :

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2 + 1} + 1 + \frac{1}{\beta^2 + 1}$$

à partir de $\rho = 10$, les deux derniers termes représentent moins de 2% de ρ . En les négligeant on aura :

$$\rho = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}}$$

Cette expression représente précisément le rayon vecteur d'une cissoïde droite, émanant du point de rebroussement, et déterminant sur l'asymptote, à partir de l'axe de symétrie, une longueur égale à α .

La distance du point de rebroussement à l'asymptote est 63,8, correspondant au poids atomique du cuivre (63,8).

Si l'on désigne par N le rang du corps (le lithium étant pris avec le n° 1) on voit que le poids atomique est donné approximativement par la formule suivante :

$$A = 20 \cdot N^2(N^2 + 10)^{-\frac{1}{2}}.$$

La figure 3 traduit cette formule.

On améliore d'ailleurs celle-ci en ajoutant — ou restituant — le terme 1 :

$$(2) \quad A = 1 + 20 \frac{N^2}{\sqrt{N^2 + 10}}.$$

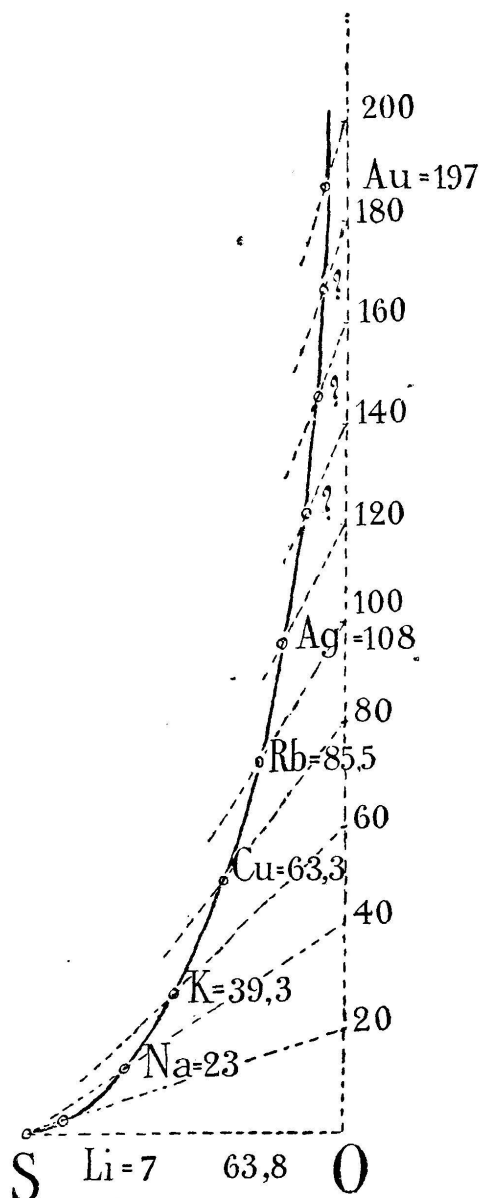


Fig. 3.

La courbe correspondante devient alors une cissoïde légèrement déformée par transformation conchoïdale. La vérification de cette formule est assez satisfaisante, — sauf pour le potassium — ainsi qu'il résulte du tableau suivant :

Eléments.	Rang.	A calculé.	A
H	0	1	1
Li	1	7	7
Na	2	22,4	23
K	3	42,2	39,3
Cu	4	64,8	63,3
Rb	5	85,4	85,2
Ag	6	107,6	108
...	..		
Au	10	192	197
...	..		

Nous avons à peine besoin d'ajouter que la loi cissoïdale traduite par la formule (2) doit être considérée comme essentiellement empirique.

F. BUTAVAND (Alger).

pondantes n'ont de solutions à somme des carrés convergente. Par suite, les valeurs nécessairement réelles de λ où l'équation intégrale (25) n'a pas de solution de carré intégrable peuvent donc, dans le cas général, ne pas être isolées et former un ensemble ayant la puissance du continu et *l'alternative n'existera plus* : il y aura des valeurs de λ où ni l'équation (25) ni l'équation homogène correspondante n'admettent de solutions de carré intégrable dans (a, b) . Il se présente par contre des *faits nouveaux* sur lesquels je ne puis insister ici¹. Je me bornerai pour finir, à signaler que la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables permet de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'alternative ait encore lieu, qu'elle retrouve ainsi les résultats de Fredholm et de Schmidt sur les noyaux symétriques et que de plus elle permet d'aborder des équations intégrales inaccessibles aux méthodes de ces deux savants.

M. PLANCHEREL (Fribourg).

LES RECTRICES. ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE PHYSIQUE

SOMMAIRE : 1. Les rectrices. — 2. Les rectrices et la surface de l'onde. — 3. Applications pratiques des rectrices. — 4. Les rectrices centrales des quadriques. — 5. La correspondance logarithmique entre quadriques et cônes recteurs. — 6. Les rectrices et la représentation des phénomènes. — 7. La dualité géométrique et les rectrices. — 8. La matière élastique et le complexe du second ordre. — Les lignes de rupture. — 10. La rectrice chimique. — 11. La loi cissoïdale atomique.

1. Les Rectrices. — Quand on examine une glace étamée recouverte d'une poussière légère, on observe que les grains de poussière paraissent s'aligner vers l'œil. L'effet est, dans une certaine mesure, d'autant plus apparent que la glace est plus épaisse. Si la glace, au lieu d'être plane, constitue une surface courbe, aux alignements rectilignes correspondent des courbes tracées sur la surface. Il est facile d'expliquer l'effet d'alignement par la réflexion de chaque grain de poussière.

On voit aisément que ces courbes sont en somme les trajectoires

¹ Cf. E. HELLINGER, *Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 136 (1909), pp. 210-271].