

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES
Autor: Plancherel, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14282>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES¹

Née il y a à peine dix ans, la théorie des équations intégrales a attiré d'emblée l'attention des mathématiciens tant par son attrait propre que par l'importance de ses applications. Plusieurs des résultats de cette théorie sont déjà classiques et nul doute que dans quelques années les cours d'Analyse ne leur consacrent un chapitre. Aussi désirerais-je vous montrer quelques-uns des principaux points de cette théorie en reliant ses résultats à des faits algébriques connus. Mais, envisagé ainsi, mon sujet est trop vaste ; je ne pourrai parler ni des équations intégrales de 1^{re} espèce

$$\int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s)$$

ni de celles de 3^{me} espèce

$$k(s) \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s)$$

caractérisées par le fait que la fonction $k(s)$ change de signe dans l'intervalle (a, b) . Je ne pourrai non plus rien dire des applications de la théorie aux équations différentielles et aux équations aux dérivées partielles. A part quelques travaux que je citerai, je me permettrai de renvoyer pour la bibliographie complète au rapport que publie actuellement M. HAHN².

1. Aperçu sur les travaux de Fredholm, Hilbert, Schmidt.

Dans des travaux classiques, C. NEUMANN a montré que la solution du problème intérieur de Dirichlet pour un domaine convexe

¹ Conférence donnée à la Réunion de la Société mathématique suisse, à Berne, le 10 décembre 1911, par M. Michel PLANCHEREL, professeur à l'Université de Fribourg.

² H. HAHN, *Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen*. B.G. Teubner, Leipzig, 1911. La première partie seule a paru jusqu'à présent comme « Sonderabdruck aus dem 20. Bande des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ».

peut s'exprimer comme potentiel d'une double couche portée par la frontière de ce domaine, potentiel que sa méthode de la moyenne arithmétique permet de calculer. Plus tard, H. POINCARÉ, levant la restriction de la convexité du domaine, montra toute l'importance de la méthode de Neumann; puis, généralisant le problème, il posa la question de la détermination d'un potentiel de double couche par la condition que les valeurs de ce potentiel sur les deux côtés de la frontière vérifient une relation linéaire donnée. La densité de la double couche satisfait alors à une équation fonctionnelle facile à obtenir; cette remarque, faite déjà par Neumann, fut le point de départ des recherches célèbres dans lesquelles FREDHOLM aborde et résout toute une classe d'équations fonctionnelles du type de l'équation rencontrée dans le problème de Neumann. Ces équations fonctionnelles, appelées aujourd'hui *équations de Fredholm* ou *équations intégrales linéaires de seconde espèce*, sont dans le cas le plus simple (le cas des fonctions de plusieurs variables n'apporte rien d'essentiellement nouveau à la théorie et se traite par les mêmes méthodes) de la forme

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s) . \quad (1)$$

$f(s)$ et $K(s, t)$ y sont deux fonctions réelles données des variables réelles $s, t (a \leq s, t \leq b)$, λ est un paramètre et $\varphi(s)$ la fonction inconnue qu'il faut déterminer de manière à satisfaire identiquement en s dans (a, b) la relation (1). $K(s, t)$ est appelé le *noyau* de l'équation intégrale et $f(s)$ porte souvent le nom de second membre de l'équation.

Pour résoudre l'équation (1), il vient naturellement à l'esprit d'essayer de représenter la solution (comme l'ont fait Liouville et C. Neumann à l'occasion de problèmes particuliers) par un développement

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \lambda \varphi_1(s) + \lambda^2 \varphi_2(s) + \dots + \lambda^n \varphi_n(s) + \dots \quad (2)$$

On obtient alors les relations de récurrence

$$\varphi_0(s) = f(s) , \quad \varphi_n(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi_{n-1}(t) dt , \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

qui permettent de calculer de proche en proche les coefficients

de λ^n dans la série (2). Si nous introduisons les noyaux *itérés*

$$K_n(s, t) = \int_a^b K_{n-1}(s, r) K(r, t) dr, \quad K_1(s, t) = K(s, t), \quad (3)$$

($n = 2, 3, \dots$)

les relations de récurrence donnent

$$\varphi_n(s) = \int_a^b K_n(s, t) f(t) dt$$

et $\varphi(s)$ prend la forme

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(\lambda; s, t) f(t) dt \quad (4)$$

avec

$$K(\lambda; s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(s, t). \quad (5)$$

Sous la seule hypothèse que $K(s, t)$ et $f(s)$ sont des fonctions bornées intégrables, on démontre la convergence des séries (2) et (5) dans le voisinage de $\lambda = 0$ et, par le fait même, l'existence dans ce voisinage d'une et d'une seule solution *bornée* donnée par (4). $\varphi(s)$ et $K(\lambda; s, t)$ sont alors des fonctions holomorphes de λ dans le voisinage de $\lambda = 0$. Il se pose naturellement à leur sujet la question difficile: *Peut-on prolonger analytiquement $K(\lambda; s, t)$, et si oui, quel est le caractère de la fonction de λ ainsi définie?* La réponse à cette question fait l'objet fondamental de la théorie des équations intégrales et c'est à Fredholm que nous la devons¹. Par une induction hardie, Fredholm est amené à mettre la *résolvante* $K(\lambda; s, t)$ sous forme de quotient de deux fonctions entières de λ

$$K(\lambda; s, t) = \frac{D(\lambda; s, t)}{D(\lambda)} = \frac{K(s, t) + \lambda A_1(s, t) + \dots + \lambda^n A_n(s, t) + \dots}{1 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n + \dots}, \quad (6)$$

les quantités numériques a_n et les fonctions $A_n(s, t)$ ayant les

¹ J. FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* [Acta Mathematica, t. 27 (1903), pp. 365-390].

valeurs

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^b \dots (n) \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \end{matrix} \right) d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_n, \quad (7)$$

$$A_n(s, t) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^b \dots (n) \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \\ t, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \end{matrix} \right) d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_n,$$

et $K \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{matrix} \right)$ étant une abréviation pour le déterminant

$$\begin{vmatrix} K(s_1, t_1), K(s_1, t_2), \dots, K(s_1, t_n) \\ K(s_2, t_1), K(s_2, t_2), \dots, K(s_2, t_n) \\ \dots \dots \dots \\ K(s_n, t_1), K(s_n, t_2), \dots, K(s_n, t_n) \end{vmatrix}.$$

Sous la seule hypothèse que le noyau $K(s, t)$ est une fonction bornée intégrable, il établit la convergence dans tout le plan de la variable complexe λ des séries $D(\lambda; s, t)$, $D(\lambda)$ et il vérifie directement que la fonction $\varphi(s)$ donnée par les relations (4) et (6) est solution (unique) de l'équation intégrale (1). La formule (6) répond à la question posée plus haut: elle montre que $K(\lambda; s, t)$ est une *fonction méromorphe* de λ et que ses pôles, nécessairement isolés et en nombre dénombrable, sont les zéros d'une transcendante entière $D(\lambda)$. On peut d'ailleurs vérifier en développant dans le voisinage de $\lambda = 0$ l'expression (6) en série entière que la série ainsi obtenue est identique à (5), donc, que (6) est le prolongement analytique de (5). C'est ce qu'a fait KELLOG.

Lorsque λ_0 est un zéro de $D(\lambda)$, Fredholm montre ensuite que l'équation *homogène*

$$\varphi(s) - \lambda_0 \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0$$

admet un nombre fini > 0 de solutions (non identiquement nulles) linéairement indépendantes. Il donne le moyen de calculer ces solutions par des séries analogues à $D(\lambda; s, t)$ et il indique ensuite à quelles conditions doit satisfaire $f(s)$ pour que l'équation *inhomogène* (1) soit résoluble pour la valeur $\lambda = \lambda_0$.

La théorie générale des équations intégrales se trouve ainsi complètement édifiée dans le mémoire de Fredholm. Ce mémoire est d'une importance capitale. Mais Fredholm n'y indique pas l'intuition qui l'a guidé ni le procédé heuristique par lequel il arrive aux formules (6) et (7). Par cela même, sa méthode, malgré

toute son élégance, malgré la beauté des résultats obtenus par des démonstrations très simples, présente un caractère artificiel de vérification et laisse l'esprit non entièrement satisfait. Aussi, y a-t-il quelque intérêt à connaître la voie par laquelle HILBERT (reprenant rigoureusement le procédé heuristique suivi par Fredholm) établit les formules de Fredholm. Esquissons-la rapidement. Elle revient à remplacer, conformément à la définition de

l'intégrale définie comme limite d'une somme, $\int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$ par sa valeur approchée

$$\delta \sum_{q=1}^n K(s, t_q) \varphi(t_q)$$

$$\left(a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b, \quad t_{q+1} - t_q = \delta = \frac{b-a}{n} \right)$$

et à résoudre d'abord, au lieu de (1), le problème voisin

$$\varphi_n(s) - \lambda \delta \sum_{q=1}^n K(s, t_q) \varphi_n(t_q) = f(s) \quad (8)$$

par rapport à la fonction inconnue $\varphi_n(s)$. Il est à prévoir, et Hilbert le démontre en toute rigueur, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s)$ existe et fournit la solution cherchée $\varphi(s)$ de (1). Calculons donc $\varphi_n(s)$; faisons, pour cela, s successivement égal à $t_1, t_2, \dots, t_n$ dans (8). Si nous notons

$$\varphi_n(t_p) = x_p, \quad \delta K(t_p, t_q) = k_{pq}, \quad f(t_p) = f_p, \quad (9)$$

nous obtenons alors un système linéaire

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^n k_{pq} x_q = f_p, \quad (p = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$. Le déterminant $D_n(\lambda)$ des coefficients des inconnues est un polynôme de degré n en λ

$$D_n(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{p=1}^n \delta K(t_p, t_p) + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \delta^2 \begin{vmatrix} K(t_p, t_p) & K(t_p, t_q) \\ K(t_q, t_p) & K(t_q, t_q) \end{vmatrix} - \dots$$

Le mineur $D_n(\lambda; t_p, t_q)$ de l'élément figurant à la $p^{\text{ième}}$ colonne et à la $q^{\text{ième}}$ ligne du déterminant $D_n(\lambda)$ est un polynôme de degré $n-1$

en λ ; il a pour expression, si $p \neq q$

$$D_n(\lambda; t_p, t_q) = \delta\lambda \left[K(t_p, t_q) - \lambda \sum_{r=1}^n \delta \begin{vmatrix} K(t_p, t_q) & K(t_p, t_r) \\ K(t_r, t_q) & K(t_r, t_r) \end{vmatrix} + \dots \right].$$

La solution x_p du système (10) est donnée par

$$x_p = \frac{1}{D_n(\lambda)} \sum_{q=1}^n f_q D_n(\lambda; t_p, t_q)$$

et $\varphi_n(s)$ se calcule ensuite par

$$\varphi_n(s) = f(s) + \lambda \delta \sum_{p=1}^n K(s, t_p) x_p.$$

Au passage à la limite $n = \infty$, les sommes multiples qui figurent comme coefficients des puissances de λ tendent vers les intégrales multiples dont elles sont des valeurs approchées; $D_n(\lambda)$ converge vers le *déterminant de Fredholm* $D(\lambda)$, $D_n(\lambda; t_p, t_q)$ vers $D(\lambda; s, t)$ lorsque t_p tend vers s et t_q vers t . On retrouve de cette manière les formules de Fredholm et tout revient à justifier ce passage à la limite pour rendre rigoureuse cette méthode. C'est ce que fait Hilbert dans la 1^{re} partie de la 1^{re} des 6 notes qu'il a consacrées à la théorie des équations intégrales¹.

Mais là n'est pas le résultat le plus important de cette première note; Hilbert spécialise le noyau en le supposant symétrique. Par une transformation orthogonale effectuée sur la forme quadratique $\sum_{p,q} k_{pq} x_p x_q$ qui se présente alors, il la transforme en une

somme $\sum_{p=1}^n \frac{\gamma_p^2}{\lambda_p}$ et obtient en passant à la limite des résultats de

la plus haute importance sur l'existence des racines de $D(\lambda) = 0$, sur les relations d'orthogonalité des solutions de l'équation intégrale homogène et sur le développement de fonctions arbitraires en séries procédant suivant les solutions de l'équation intégrale homogène. Nous reviendrons plus loin sur ces résultats.

C'est à une méthode de résolution entièrement différente qu'aboutit E. SCHMIDT dans sa thèse classique². Guidé par les résultats obtenus par Hilbert dans le cas du noyau symétrique, il

¹ D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* [Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1904, 1905, 1906, 1910].

² E. SCHMIDT, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*. I Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener [Mathematische Annalen, Bd. 63 (1907), pp. 433-476].

montre que la résolution de l'équation générale peut se ramener à celle de l'équation à noyau symétrique et il aborde directement l'étude de l'équation intégrale homogène à noyau symétrique. Il établit par des raisonnements directs et très simples tous les théorèmes de Fredholm et de Hilbert dont l'énoncé ne fait pas intervenir les séries de Fredholm; puis, par une méthode imitée de méthodes de Schwarz et de Græfe, il établit l'existence d'un paramètre singulier et montre que la résolvante du noyau symétrique est une fonction méromorphe à pôles simples. La résolution de l'équation intégrale inhomogène découle ensuite facilement de celle de l'équation homogène. Etablissant la forme canonique du noyau symétrique, il retrouve et généralise (en les débarrassant d'une restriction inutile) les théorèmes de développement de Hilbert. La thèse de Schmidt présente des qualités de simplicité et d'élégance remarquables; les démonstrations y font disparaître immédiatement les analogies algébriques profondes de la théorie des équations intégrales.

Les nombreux travaux parus à la suite des travaux cités n'ont pas modifié les lignes générales de la théorie. Nous ne citerons en passant que ceux de PLEMELJ et de GOURSAT relatifs à l'étude de la résolvante de Fredholm dans le voisinage de ses pôles et ceux de J. SCHUR démontrant sans l'intermédiaire des formules de Fredholm plusieurs propriétés des équations intégrales à noyau asymétrique. Par contre, des points de vue tout nouveaux ont été apportés par Hilbert dans ses 4^{me} et 5^{me} notes¹: sa méthode des formes quadratiques à une infinité de variables a permis d'aborder des cas qui échappent à la théorie de Fredholm.

2. Analogies algébriques de la théorie des équations intégrales.

Du fait que les formules de Fredholm s'obtiennent comme cas limite des formules de résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues, il est à prévoir que la théorie des équations intégrales présentera des analogies avec celle de ces systèmes. MM. HILBERT et TÆPLITZ ont, dans leurs études sur les formes bilinéaires à une infinité de variables, insisté sur le fait que la notion de déterminant, qui joue un si grand rôle dans l'exposition ordinaire de la théorie des équations algébriques linéaires, est difficilement extensible au cas d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues. Aussi, pour bien montrer ces analogies, allons-nous d'abord, avec M. Tæplitz, énoncer sous une forme qui diffère de la forme ordinairement suivie, les théorèmes relatifs à la résolution des systèmes d'équations linéaires,

¹ *Loc. cit.*

deux systèmes complets de r solutions linéairement indépendantes de (Ib) et de (IIb). La solution générale de (Ib) est par suite

$$x_p = c_1 \alpha_p^{(1)} + c_2 \alpha_p^{(2)} + \dots + c_r \alpha_p^{(r)}, \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

et celle de (IIb)

$$y_p = c_1 \beta_p^{(1)} + c_2 \beta_p^{(2)} + \dots + c_r \beta_p^{(r)}, \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

$c_1, c_2, \dots, c_r$ étant r constantes arbitraires quelconques. Pour que (Ia) soit résoluble, il faut et il suffit que $[f] = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ vérifie les r relations

$$f_1 \beta_1^{(s)} + f_2 \beta_2^{(s)} + \dots + f_n \beta_n^{(s)} = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, r) \quad (12)$$

et de même pour que (IIa) soit résoluble, il faut et il suffit que $[g]$ vérifie les r relations

$$g_1 \alpha_1^{(s)} + g_2 \alpha_2^{(s)} + \dots + g_n \alpha_n^{(s)} = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, r) \quad (13)$$

Lorsque les relations (12) sont vérifiées, la solution générale de (Ia) est de la forme

$$x_p = X_p + c_1 \alpha_p^{(1)} + c_2 \alpha_p^{(2)} + \dots + c_r \alpha_p^{(r)}, \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

(X_p) étant une solution particulière quelconque du système et $c_1, c_2, \dots, c_r$ r constantes arbitraires. De même, si les relations (13) sont vérifiées, et si (Y_p) désigne une solution particulière quelconque de (IIa), la solution générale de ce système est

$$y_p = Y_p + c_1 \beta_p^{(1)} + c_2 \beta_p^{(2)} + \dots + c_r \beta_p^{(r)}, \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

Remarquons qu'il résulte des théorèmes I et II l'alternative suivante: *Ou bien* les systèmes inhomogènes transposés (Ia), (IIa) sont toujours résolubles, quelque soient leurs seconds membres $[f]$, $[g]$, *ou bien* les systèmes homogènes transposés (Ib), (IIb) possèdent des solutions (en même nombre) non identiquement nulles.

Pour montrer les analogues de ces théorèmes dans la théorie des équations intégrales, considérons les équations

$$\begin{array}{l|l} \text{(Ia)} & \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s) \\ \text{(Ib)} & \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0 \\ \text{(IIa)} & \psi(s) + \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt = g(s) \\ \text{(IIb)} & \psi(s) + \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt = 0 \end{array}$$

(Ia) et (IIa) sont des équations inhomogènes à noyaux transposés. (Ib) et (IIb) sont les équations homogènes correspondantes; elles admettent les solutions triviales $\varphi(s) \equiv 0$, $\psi(s) \equiv 0$ que nous conviendrons de ne pas compter comme solutions. Nous admettrons pour simplifier que $K(s, t)$, $f(s)$, $g(s)$ sont des fonctions continues et nous exigerons des solutions $\varphi(s)$, $\psi(s)$ qu'elles soient aussi continues dans (a, b) . La théorie de Fredholm permet alors d'établir les théorèmes analogues.

I. *Les équations intégrales homogènes transposées (Ib), (IIb), ont le même nombre r de solutions linéairement indépendantes. r est fini.*

II. *Lorsque $r = 0$, les équations intégrales inhomogènes transposées (Ia), (IIa) ont chacune une solution unique et bien déterminée, pour toutes fonctions $f(s)$, $g(s)$.*

III. *Lorsque $r > 0$, les équations intégrales inhomogènes (Ia), (IIa) n'ont en général pas de solution. Soient*

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_r(s); \quad \psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_r(s)$$

deux systèmes complets de r solutions linéairement indépendantes de (Ib) et de (IIb). La solution générale de (Ib) est

$$\varphi(s) = c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \dots + c_r \varphi_r(s)$$

et la solution générale de (IIb) est

$$\psi(s) = c_1 \psi_1(s) + c_2 \psi_2(s) + \dots + c_r \psi_r(s)$$

$c_1, c_2, \dots, c_r$ étant r constantes arbitraires. Pour que (Ia) soit résoluble, il faut et il suffit que $f(s)$ vérifie les r relations

$$\int_a^b f(s) \psi_1(s) ds = 0, \quad \int_a^b f(s) \psi_2(s) ds = 0, \quad \dots, \quad \int_a^b f(s) \psi_r(s) ds = 0 \quad (14)$$

et de même, pour que (IIa) soit résoluble, il faut et il suffit que $g(s)$ vérifie les r relations

$$\int_a^b g(s) \varphi_1(s) ds = 0, \quad \int_a^b g(s) \varphi_2(s) ds = 0, \quad \dots, \quad \int_a^b g(s) \varphi_r(s) ds = 0.$$

Si les relations (14) sont vérifiées, la solution générale de (Ia) est

$$\varphi(s) = \Phi(s) + c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \dots + c_r \varphi_r(s),$$

$\Phi(s)$ étant une solution particulière quelconque et $c_1, c_2, \dots, c_r$ r constantes arbitraires. De même, si les relations (15) sont véri-

fiées et si $\Psi(s)$ est une solution particulière quelconque de (IIa), la solution générale de cette équation est

$$\psi(s) = \Psi(s) + c_1\psi_1(s) + c_2\psi_2(s) + \dots + c_r\psi_r(s).$$

Il résulte donc encore des théorèmes I et II *l'alternative* : Ou bien les équations intégrales transposées inhomogènes (Ia) et (IIa) sont résolubles quelque soient leurs seconds membres $f(s)$, $g(s)$ ou bien les équations homogènes transposées (Ib) et (IIb) admettent des solutions non identiquement nulles. Cette alternative est d'une extrême importance pour les applications de la théorie des équations intégrales.

Les théorèmes indiqués plus haut sur les systèmes linéaires d'équations algébriques peuvent s'établir sans faire usage des déterminants. De même, leurs analogues de la théorie des équations intégrales, bien qu'obtenus pour la première fois par Fredholm par l'intermédiaire de ses séries, peuvent se démontrer directement. Mais, s'il s'agit, en algèbre, de trouver des critères pour déterminer dans quel cas de l'alternative on se trouve ou de calculer effectivement les solutions l'emploi des déterminants est nécessaire. Pour les introduire ici de manière à conserver une analogie encore plus étroite, nous aurons avantage à introduire un paramètre λ et à considérer non plus les systèmes (I) et (II) mais le système (10) que nous avons obtenu en exposant la méthode de Hilbert. Nous étudierons donc les systèmes transposés

$$\begin{array}{l} \text{(I'a)} : x_p - \lambda \sum_{q=1}^n k_{pq} x_q = f_p \\ \text{(II'a)} : y_p - \lambda \sum_{q=1}^n k_{qp} y_q = g_p \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{(I'b)} : x_p - \lambda \sum_{q=1}^n k_{pq} x_q = 0 \\ \text{(II'b)} : y_p - \lambda \sum_{q=1}^n k_{qp} y_q = 0 \end{array} \right. \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

La théorie des déterminants montre que pour que (I'a) soit résoluble quelque soit $[f]$, il faut et il suffit que le déterminant $D_n(\lambda)$ des coefficients des inconnues soit $\neq 0$ et que pour que le système (I'b) soit résoluble, il faut et il suffit que ce déterminant soit nul. Si nous remarquons que le déterminant du système (II') est encore égal à $D_n(\lambda)$ et que l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré $D_n(\lambda) = 0$ a n racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (finies ou infinies), nous voyons que

1. pour $\lambda \neq \lambda_p$, (I'a) et (II'a) sont toujours résolubles, quelque soient $[f]$, $[g]$.

2. pour $\lambda = \lambda_p$, (I'b) et (II'b) sont résolubles.

3. Dans le dernier cas, les solutions s'obtiennent au moyen des mineurs de $D_n(\lambda)$ et ν_p étant le rang du premier mineur de $D_n(\lambda)$

qui ne s'annule pas pour $\lambda = \lambda_p$, le nombre r_p des solutions de l'équation homogène est égal à $n - r_p$, pour $\lambda = \lambda_p$.

Les analogies avec les résultats de Fredholm sont immédiates. Nous prendrons, pour les voir, les systèmes suivants d'équations intégrales :

$$\begin{array}{l|l} \text{(I'a)} : \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s) & \text{(I'b)} : \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0 \\ \text{(II'a)} : \psi(s) - \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt = g(s) & \text{(II'b)} : \psi(s) - \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt = 0 \end{array}$$

D'après Fredholm, l'alternative dépend d'une transcendante entière $D(\lambda)$, donnée par (6), qui n'a donc que des zéros isolés appelés *paramètres singuliers* de l'équation intégrale. Alors

1. si $D(\lambda) \neq 0$, (I'a) et (II'a) sont résolubles quelque soient $f(s)$, $g(s)$.

2. si $D(\lambda) = 0$, (I'b) et (II'b) sont résolubles.

3. le nombre des solutions et leur calcul dans le cas 2) dépendent de séries entières qui sont les analogues des mineurs de $D_n(\lambda)$.

Remarquons que $D(\lambda)$ peut ne pas avoir de zéros; il est alors de la forme $D(\lambda) = e^{h(\lambda)}$. Ce cas se présente en particulier pour un noyau $K(s, t)$ tel que $K(s, t) = 0$ pour $s \leq t$. Dans ce cas l'équation intégrale (équation de VOLTERRA) se réduit à

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^s K(s, t) \varphi(t) dt = f(s)$$

et il est facile de vérifier que les séries (2) et (5) relatives à ce noyau convergent pour toute valeur finie de λ . L'équation homogène correspondante n'a jamais de solution (bornée).

3. Les analogies dans le cas du noyau symétrique.

Lorsque le noyau $K(s, t)$ est une fonction symétrique de s, t : $K(s, t) = K(t, s)$ les quantités $k_{pq} = K(t_p, t_q)$ sont telles que $k_{pq} = k_{qp}$. Les systèmes transposés (I') et (II') sont identiques et il suffit dans ce cas d'étudier l'un d'eux, par exemple (I'). La substitution $\lambda = \frac{1}{\mu}$ ramène l'équation $D_n(\lambda) = 0$ à une équation bien connue sous le nom d'équation séculaire. Pour $n = 2, 3$ une équation de cette forme se présente dans la recherche des axes principaux des coniques et des quadriques (équation en « s ») et

l'on démontre que ses racines sont réelles. Ce fait est général; de la symétrie $k_{pq} = k_{qp}$ résulte que l'équation $D_n(\lambda) = 0$ a toutes ses racines réelles. De plus, alors que dans le cas général $D_n(\lambda) = 0$ peut avoir toutes ses racines infinies, il existe ici au moins une racine finie. Notant par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les solutions de $D_n(\lambda) = 0$, chacune répétée un nombre de fois égal au nombre des solutions linéairement indépendantes de (I'b) pour cette valeur de λ , nous pourrons trouver n systèmes de valeurs

$$x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)} \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

tels que chacun d'eux soit solution de (I'b) pour la valeur correspondante $\lambda = \lambda_p$ et tels que

$$\sum_{r=1}^n x_r^{(p)} x_r^{(q)} = \delta_{pq} \quad (p, q = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

où $\delta_{pq} = 0$, si $p \neq q$ et $\delta_{pp} = 1$. La substitution

$$y_p = \sum_{r=1}^n x_r^{(p)} x_r \quad (p = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

est alors une substitution orthogonale, c'est-à-dire qu'elle laisse

invariante la somme $\sum_{p=1}^n x_p^2$

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Cette substitution transforme la forme quadratique

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n k_{pq} x_p x_q = x_1^2 + 2x_1 x_2 + \dots$$

en une somme algébrique de carrés

$$\sum_{p=1}^n \frac{[x_1^{(p)} x_1 + x_2^{(p)} x_2 + \dots + x_n^{(p)} x_n]^2}{\lambda_p} = \sum_{p=1}^n \frac{y_p^2}{\lambda_p}. \quad (17)$$

Nous obtenons ainsi la forme canonique de la forme quadratique. Cette forme canonique est bien connue pour $n = 2, 3$, la transformation effectuée étant alors la transformation d'une conique ou d'une quadrique à ses axes principaux. Sachant résoudre l'équa-

tion homogène (I'b) on pourra facilement exprimer la solution de (I'a) en fonction des seconds membres et des quantités $x_p^{(r)}$. Nous n'insistons pas là-dessus.

Indiquons maintenant les analogies. Nous considérons pour cela les équations à noyau symétrique

$$(I'a) : \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s) ; \quad (I'b) : \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0$$

On peut démontrer que toutes les racines de $D(\lambda) = 0$ sont *réelles*. En d'autres termes, l'équation homogène (I'b) n'admet de solutions que pour des valeurs réelles de λ . De plus $D(\lambda) = 0$ possède au moins une racine réelle finie. Il existe donc *au moins une* valeur finie de λ , pour laquelle (I'b) est résoluble. Soient encore $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ les zéros de $D(\lambda)$, chacun d'eux étant répété dans cette suite autant de fois que l'équation (I'b) a de solutions linéairement indépendantes pour cette valeur de λ ; nous pourrions faire correspondre à chaque λ_p une fonction $\varphi_p(s)$ vérifiant la relation

$$\varphi_p(s) - \lambda_p \int_a^b K(s, t) \varphi_p(t) dt = 0 \quad (18)$$

et telle que

$$\int_a^b \varphi_p(s) \varphi_q(s) ds = \delta_{pq} , \quad (p, q = 1, 2, 3, \dots) . \quad (19)$$

Ces relations, analogues des relations (15), expriment que les solutions de l'équation intégrale homogène (I'b) relatives à deux valeurs différentes λ_p, λ_q sont orthogonales et que le système complet des solutions

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_p(s), \dots$$

forme un système orthogonal normé de fonctions pour l'intervalle (a, b) . L'analogue de la forme (17) est ici la formule

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t) \psi(s) \psi(t) ds dt = \sum_p \frac{\left[\int_a^b \psi(s) \varphi_p(s) ds \right]^2}{\lambda_p} \quad (20)$$

où au second membre la sommation est étendue à toutes les valeurs du paramètre singulier λ_p . De cette relation découlent des

propriétés très importantes relatives à la forme canonique

$$K(s, t) = \sum_p \frac{\varphi_p(s) \varphi_p(t)}{\lambda_p} \quad (21)$$

du noyau et au développement d'une fonction arbitraire $f(s)$ en série de la forme

$$f(s) = f_1 \varphi_1(s) + f_2 \varphi_2(s) + \dots \quad f_p = \int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds \quad (22)$$

procédant suivant les solutions de l'équation (I' b) (autofonctions ou fonctions fondamentales). La relation (21) a lieu lorsque la série du second membre est convergente et E. Schmidt a montré qu'un développement (22) uniformément et absolument convergent est valable pour toute fonction $f(s)$ susceptible d'une représentation de la forme

$$f(s) = \int_a^b K(s, t) g(t) dt \quad (23)$$

Remarquons, en terminant, que la solution de (I' a) s'exprime aisément au moyen des solutions $\varphi_p(s)$ de (I' b). On a, en effet,

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_p \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda} \varphi_p(s), \quad f_p = \int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds.$$

4. Les équations intégrales singulières.

Nous venons de voir l'étroite analogie qui existe entre la théorie des systèmes d'équations algébriques linéaires et celle des équations intégrales linéaires de seconde espèce. Remarquons encore que la plupart des résultats de la théorie de Fredholm subsistent encore dans le cas où $K(s, t)$ présente des singularités infinies mais où l'un des noyaux itérés $K_n(s, t)$ est fini. De même, dans le cas du noyau symétrique, les principaux résultats sont encore

vrais si $\int_a^b \int_a^b [K(s, t)]^2 ds dt$ est finie.

Dans ses 4^{me} et 5^{me} notes sur la théorie des équations intégrales, HILBERT a montré la raison profonde de cette analogie, il en a trouvé les limites et par le même coup il a enrichi d'une nouvelle méthode la théorie des équations intégrales. Cette méthode est d'autant plus importante qu'elle permet d'aborder la théorie des

équations intégrales à noyau singulier, c'est-à-dire à noyau présentant des singularités assez élevées pour échapper aux méthodes de Fredholm et de Schmidt. Nous ne pouvons ici que donner un rapide aperçu de ses fondements.

Un système de fonctions $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... définies dans un intervalle (a, b) , de carré intégrable dans cet intervalle, est *orthogonal* relativement à (a, b) , si l'intégrale du produit de deux fonctions

différentes du système est toujours nulle: $\int_a^b \varphi_p(s) \varphi_q(s) ds = 0$, $p \neq q$.

Un tel système est toujours dénombrable. Nous le *normerons* par

la condition $\int_a^b [\varphi_p(s)]^2 ds = 1$. On a donc

$$\int_a^b \varphi_p(s) \varphi_q(s) ds = \delta_{pq}.$$

Il sera dit *fermé*, si toutes les relations

$$\int_a^b h(s) \varphi_p(s) ds = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

ne sont vérifiées simultanément que par la seule fonction $h(s) \equiv 0$. Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos s}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin s}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2s}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2s}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

forment, par exemple, un système orthogonal fermé et normé pour l'intervalle $(0, 2\pi)$. $f(s)$ étant une fonction de carré intégrable dans (a, b) , on peut former les constantes (coefficients de Fourier de $f(s)$ relativement au système $[\varphi_p(s)]$)

$$f_p = \int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds, \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

et la suite $[f_p]$ vérifie l'inégalité

$$\sum_p f_p^2 \leq \int_a^b [f(s)]^2 ds$$

inégalité dans laquelle le signe $=$ est à prendre lorsque le système $[\varphi_p(s)]$ est fermé. Dans ce dernier cas, on a plus générale-

ment,

$$\int_a^b f(s) g(s) ds = \sum_p f_p g_p \quad (24)$$

$f(s)$ et $g(s)$ étant deux fonctions quelconques de carré intégrable, f_p , g_p leurs coefficients de Fourier.

La somme des carrés des coefficients de Fourier d'une fonction de carré intégrable est donc convergente. Inversement, MM. F. RIESZ et E. FISCHER ont montré qu'étant donnée une suite quelconque de constantes réelles $f_1, f_2, \dots$, telles que $\sum_p f_p^2$ con-

verge, il existe au moins une fonction $f(s)$ de carré intégrable admettant ces constantes comme coefficients de Fourier relativement au système orthogonal normé $[\varphi_p(s)]$. En particulier, cette fonction $f(s)$ est unique (à une fonction d'intégrale nulle près) lorsque le système $[\varphi_p(s)]$ est fermé. Remarquons cependant que le théorème de Riesz-Fischer n'est vrai sans exception que lorsqu'on étend la notion d'intégrale comme l'a fait LEBESGUE. Nous prendrons donc dans tout ce § les intégrales au sens de Lebesgue.

Prenons maintenant l'équation intégrale

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s) \quad (25)$$

et supposons $f(s)$ de carré intégrable dans (a, b) et $K(s, t)$ symétrique tel que

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t) g(s) g(t) ds dt$$

existe pour toute fonction $g(s)$ de carré intégrable. Soit $[\varphi_p(s)]$ un système orthogonal fermé et normé relativement à l'intervalle (a, b) . Notons

$$\begin{aligned} x_p &= \int_a^b \varphi(s) \varphi_p(s) ds, & k_{pq} &= \int_a^b \int_a^b K(s, t) \varphi_p(s) \varphi_q(t) ds dt = k_{qp}, \\ f_p &= \int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds, \end{aligned} \quad (26)$$

multiplions l'équation intégrale par $\varphi_p(s)$ et intégrons dans (a, b)

en nous servant de la formule de Riesz (24). Il vient

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} x_q = f_p, \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

C'est un système d'une infinité d'équations du 1^{er} degré à une infinité d'inconnues $x_1, x_2, \dots$. Si ce système admet une solution (x_p) de somme des carrés convergente, on pourra lui faire correspondre par le théorème de Riesz-Fischer une fonction $\varphi(s)$, de carré intégrable, que l'on démontrera être solution de l'équation intégrale. *Il y a donc équivalence entre la résolution de l'équation intégrale et celle d'un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.* On est ainsi amené à l'étude de tels systèmes d'équations et à celle des formes quadratiques qui en dépendent. Cette étude a été faite par Hilbert. Toeplitz et Hellinger, dans leurs recherches ultérieures, ont apporté des contributions nouvelles à cette théorie, ils l'ont surtout simplifiée en réduisant à un minimum les questions de convergence qui se posent inévitablement dans une telle théorie, et en éclairant mieux la face algébrique du problème. L'hypothèse faite plus haut sur $K(s, t)$ revient à dire que la forme quadratique à une infinité de variables $\sum_{p,q} k_{pq} x_p x_q$ est bornée, c'est-à-dire telle que

$$\left| \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n k_{pq} x_p x_q \right| < M$$

pour tout système de valeurs

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

M étant une constante convenablement choisie. C'est à l'étude des formes bornées que se limite la théorie de Hilbert. Hilbert considère comme solutions (et cela est naturel, d'après le théorème de Riesz-Fischer) les seules solutions $x_1, x_2, \dots$ à somme des carrés convergente. Sa théorie montre alors que l'analogie trouvée plus haut ne subsiste plus en général. Ainsi, il peut y avoir des valeurs de λ , pour lesquelles les équations homogènes correspondantes de (27) possèdent une infinité dénombrable de solutions. Les valeurs de λ où le système (27) n'est pas résoluble sont encore réelles et il en existe encore au moins une, mais elles peuvent ne pas être isolées et former un ensemble ayant la puissance du continu. Dans ces cas, *l'alternative n'existe plus* : il y a des valeurs de λ pour lesquelles ni les équations (27) ni les équations homogènes corres-

pondantes n'ont de solutions à somme des carrés convergente. Par suite, les valeurs nécessairement réelles de λ où l'équation intégrale (25) n'a pas de solution de carré intégrable peuvent donc, dans le cas général, ne pas être isolées et former un ensemble ayant la puissance du continu et *l'alternative n'existera plus* : il y aura des valeurs de λ où ni l'équation (25) ni l'équation homogène correspondante n'admettent de solutions de carré intégrable dans (a, b) . Il se présente par contre des *faits nouveaux* sur lesquels je ne puis insister ici¹. Je me bornerai pour finir, à signaler que la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables permet de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'alternative ait encore lieu, qu'elle retrouve ainsi les résultats de Fredholm et de Schmidt sur les noyaux symétriques et que de plus elle permet d'aborder des équations intégrales inaccessibles aux méthodes de ces deux savants.

M. PLANCHEREL (Fribourg).

LES RECTRICES. ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE PHYSIQUE

SOMMAIRE : 1. Les rectrices. — 2. Les rectrices et la surface de l'onde. — 3. Applications pratiques des rectrices. — 4. Les rectrices centrales des quadriques. — 5. La correspondance logarithmique entre quadriques et cônes recteurs. — 6. Les rectrices et la représentation des phénomènes. — 7. La dualité géométrique et les rectrices. — 8. La matière élastique et le complexe du second ordre. — Les lignes de rupture. — 10. La rectrice chimique. — 11. La loi cissoïdale atomique.

1. Les Rectrices. — Quand on examine une glace étamée recouverte d'une poussière légère, on observe que les grains de poussière paraissent s'aligner vers l'œil. L'effet est, dans une certaine mesure, d'autant plus apparent que la glace est plus épaisse. Si la glace, au lieu d'être plane, constitue une surface courbe, aux alignements rectilignes correspondent des courbes tracées sur la surface. Il est facile d'expliquer l'effet d'alignement par la réflexion de chaque grain de poussière.

On voit aisément que ces courbes sont en somme les trajectoires

¹ Cf. E. HELLINGER, *Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 136 (1909), pp. 210-271].