§ 3. — Applications diverses des propriétés des points entiers.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

bre, réel ou imaginaire, a, *sont les sommets d'un quadrillage ayant pour base le segment OA qui joint l'origine au point A, affixe de* a.

§ 3. — **Applications diverses des propriétés des points entiers.**

Les applications à l'arithmétique de la théorie des points entiers sont très nombreuses. Nous serons obligés de faire un choix parmi elles, et de donner simplement quelques exemples de ces diverses applications.

Etant donné la courbe $f(x, y) = 0$ ou plus généralement $f(x, y, a) = 0$ représentée par une équation homogène, a désignant par exemple une longueur de la figure, tout point

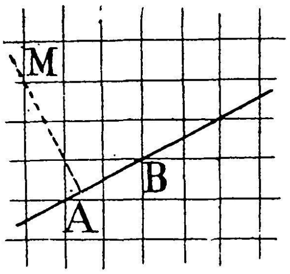

Fig. 8.

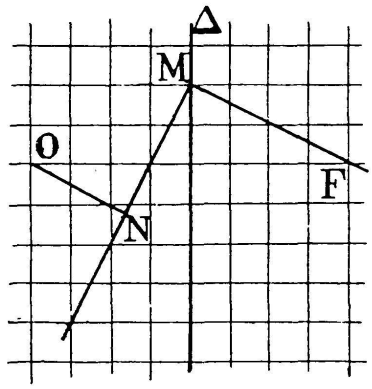

Fig. 9.

entier de cette courbe donnera une solution en nombres entiers de l'équation $f(x, y, a) = 0$. Un point commensurable de coordonnées $\frac{x}{k}$, $\frac{y}{k}$ donnera une solution en nombres entiers de $f(x, y, ka) = 0$. Citons un exemple de ce genre d'applications: Prenons une droite fixe Δ qui sera une ligne verticale du quadrillage et 2 points O et F, symétriques par rapport à Δ, et entiers. Prenons un point M commensurable variable sur Δ, menons MN, perpendiculaire en M à FM, (fig. 9) et abaissons enfin ON perpendiculaire sur MN. Il est facile de voir que les coordonnées de N sont commensurables. Le lieu de ce point est d'ailleurs une strophoïde. On aura donc des solutions en nombres entiers de l'équation

$$x(x^2 + y^2) = ka(x^2 - y^2) .$$

La plupart de ces applications concernent le carré de la distance de 2 points entiers, nombre qui est un entier, somme de deux carrés. Prenons par exemple la parabole $y^2 = 4\,px$, p étant un nombre entier. On aura des points entiers de cette parabole en posant $y = 2mp$ et par suite $x = m^2p$. Soit F le foyer de cette parabole (fig. 10), Δ sa directrice, et M un point entier de cette conique. On a $\overline{\mathrm{MF}}^2 = \overline{\mathrm{MN}}^2$ qui donne une solution en nombres entiers de $a^2 = b^2 + c^2$, car $\overline{\mathrm{MF}}^2$ est une somme de 2 carrés. Dans le

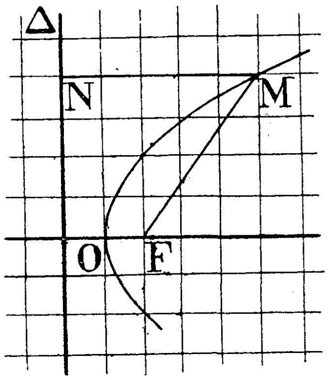

Fig. 10.

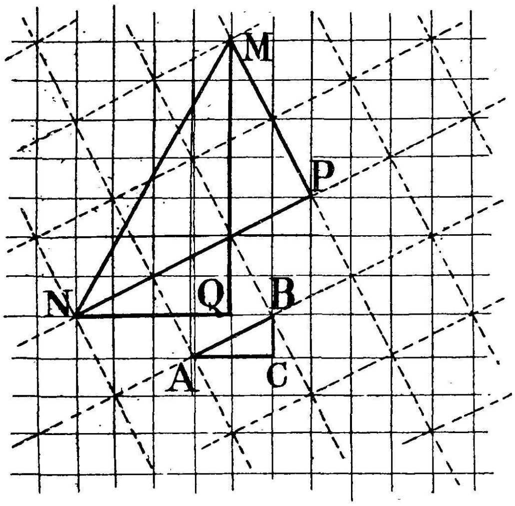

Fig. 11.

cas de la figure on a : $p = 1$, $x = 4$, $y = 4$ d'où l'égalité : $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Prenons 2 points M et N (fig. 11) sommets d'un quadrillage de base AB. Le carré de leur distance est le produit par $\overline{\mathrm{AB}}^2$ d'une somme de 2 carrés, ici 3^2 et 2^2 car $\mathrm{NP} = 3.\ \mathrm{AB}$ et $\mathrm{MP} = 2.\ \mathrm{AB}$. Mais d'autre part le carré de cette distance est la somme des carrés de MQ et NQ. Si l'on remarque enfin que $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2$, on voit que l'on a démontré le théorème :

Le produit d'une somme de 2 carrés par une somme de 2 carrés est encore une somme de 2 carrés.

Dans le cas de la figure on a : $7^2 + 4^2 = (2^2 + 1^2)(3^2 + 2^2)$

La considération des points entiers, équidistants de 2 points entiers donnés, montrerait qu'un nombre peut être de plusieurs façons une somme de 2 carrés. Nous allons étendre ceci à une somme de 4 carrés. Prenons 2 couples de points diamétralement opposés dans un même cercle AB et

CD (fig. 12). On peut par exemple les obtenir en prenant à l'aide de quadrillages de base arbitraire un rectangle quelconque : ici le rectangle 2,1 du quadrillage de base 3,1. Soit M un point entier quelconque du plan. L'égalité connue :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2$$

montre qu'un nombre peut s'écrire de plusieurs façons sous forme d'une somme de 4 carrés, car chaque terme, tel que $\overline{MA}^2$, est une somme de 2 carrés. On a ici l'égalité : $1^2 + 6^2$

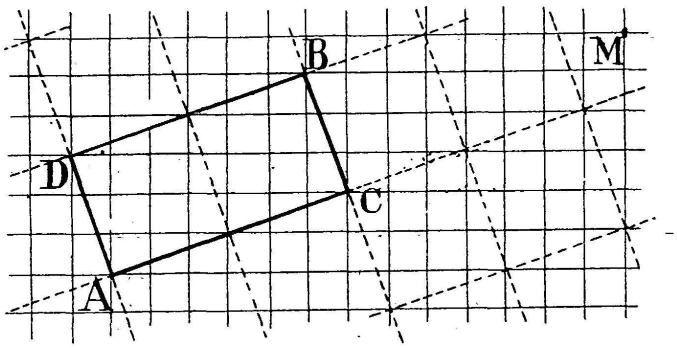

Fig. 12.

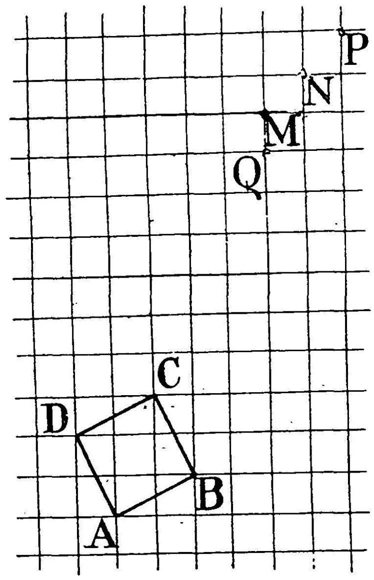

Fig. 13.

$+ 8^2 + 13^2 = 3^2 + 4^2 + 7^2 + 14^2$. Cette représentation des sommes de 4 carrés permet de résoudre diverses questions. Par exemple si l'on veut trouver 2 sommes de 4 carrés égales et portant sur 8 entiers consécutifs on voit qu'il suffira de partir du carré ABCD (fig. 13). Les points M, N, P, etc... répondent à la question. On a pour le point M : $2^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2 = 3^2 + 4^2 + 6^2 + 9^2$. Si l'on prend un point tel que Q pour lequel un même carré se retrouve dans les deux membres on aura des égalités concernant les sommes de 3 carrés. Ici : $2^2 + 6^2 + 7^2 = 3^2 + 4^2 + 8^2$ [1].

[1] On obtiendrait de pareilles égalités en considérant le quadrillage « cubique » des points entiers de l'espace : le plan, lieu des points équidistants de 2 points donnés, contient parfois des points entiers pour lesquels on a des sommes de 3 carrés. On peut étendre certaines des propriétés du plan à de tels points entiers mais non toutes. En particulier la représentation par imaginaires du plan ne se retrouve pas dans l'espace. Signalons encore l'impossibilité d'obtenir des quadrillages « cubiques » à bases différentes, si l'on veut que les 3 directions d'un tel quadrillage soient distinctes de celles du premier.