

§ 2. — Points entiers.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

lygones et la courbe même, en estimant à l'œil les fractions de carrés, mais ce procédé demande une certaine habitude. Remarquons que ici l'aire considérée est exactement 150.

§ 2. — Points entiers.

Nous appellerons pour abrégé *point entier du plan* tout point dont les deux coordonnées sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et *point commensurable* tout point dont les 2 coordonnées sont des nombres commensurables, l'unité de longueur étant le côté du carré qui sert de base au quadrillage et les axes de coordonnées étant 2 perpendiculaires du quadrillage. Nous nous occuperons presque exclusivement des points entiers. Nous allons voir comment la considération de tels points facilite la construction d'un grand nombre de figures planes, en étudiant auparavant les propriétés les plus élémentaires des droites passant par des points à coordonnées commensurables.

Remarquons d'abord que, étant donné n points commensurables, on peut toujours, avec un rapport d'homothétie convenable, les rendre entiers, en prenant un côté de quadrillage assez petit. Aussi suffira-t-il de prouver, dans certains cas, l'existence de points commensurables répondant à des conditions données, pour en déduire l'existence de points entiers répondant aux mêmes conditions.

Au point de vue qui nous occupe les droites du plan peuvent être rangées en plusieurs catégories : 1° les droites qui ne contiennent aucun point commensurable. Ex. : $x = \sqrt{3}$. 2° les droites qui contiennent un point et un seul à coordonnées commensurables. Ex. : $y = x\sqrt{3}$. 3° les droites qui contiennent 2 et par suite une infinité de points à coordonnées commensurables. Nous supposons d'ailleurs qu'il y ait au moins un de ces points à coordonnées entières. Il est alors visible qu'une telle droite contient une infinité de points à coordonnées entières. Si, en effet, nous supposons que le point entier de cette droite soit l'origine, et le point commensurable le point $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ le point entier ad , bc fait partie de la même droite et par suite les points $m. ad$, $m. bc$ en font

également partie. On verrait aisément qu'il y a sur une telle droite 2 points tels que A, B par exemple (fig. 4) qui sont entiers et à la distance minima, tout autre point entier de la droite étant à une distance de A représentée par m . AB [m étant un entier positif ou négatif]. Il est souvent commode de définir une droite telle que celle-ci par un point entier, A, par exemple, et par les coordonnées a, b du point B voisin par rapport à A, pris pour origine; a et b sont donc des nombres premiers entre eux et $\frac{b}{a}$ est le coefficient angulaire de la droite. Les droites que nous aurons à considérer seront le plus souvent définies ainsi. Par exemple la droite de la figure précédente est la droite A (3, 1).

On voit que 2 droites A(a, b) et A($-a, -b$) sont identiques. Si l'on change le signe d'un des 2 nombres a ou b ,

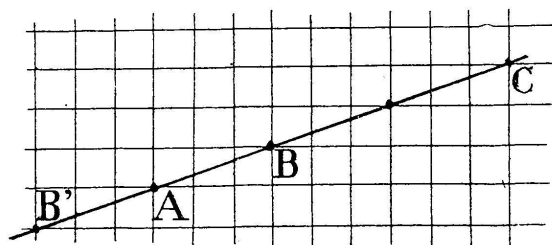


Fig. 4.

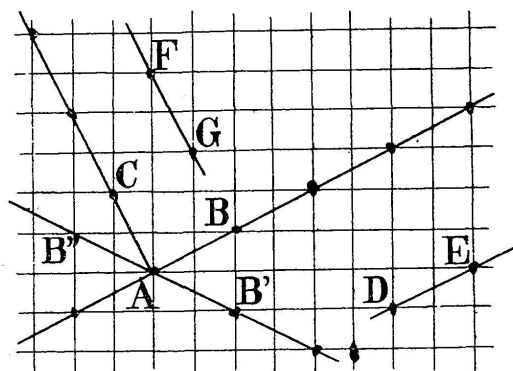


Fig. 5.

et d'un seulement, on obtient une droite symétrique de la première par rapport à l'un des axes de coordonnées. Exemple : AB : AB'' etc... (fig. 5). Il est facile de voir que la droite A($-b, a$), ici AC, est perpendiculaire sur AB.

Ce qui précède donne immédiatement la solution des 2 problèmes suivants: *Mener par un point entier une parallèle ou une perpendiculaire à une droite donnée.* On a par exemple, sur la figure, mené par D la parallèle DE à AB, et par F la perpendiculaire FG à AB.

Nous allons généraliser ceci en considérant des quadrilages à bases différentes. Nous appelons base d'un quadrillage, un quelconque des segments tels que AM (fig. 6) qui sert de côté à un des carrés du quadrillage, et qui représente la

distance de 2 parallèles voisines. Considérons maintenant le quadrillage ayant pour base un segment quelconque AB, dont les deux extrémités sont entières, c'est-à-dire le quadrillage tracé en pointillé. On voit que tous les points entiers, ou si l'on veut tous les sommets du nouveau quadrillage, sont des sommets de l'ancien, mais que la réciproque n'est pas vraie. On peut montrer que tout point commensurable de l'un des quadrillages est un point commensurable de l'autre. Nous nous contenterons de l'établir sur un cas particulier en considérant par exemple le point entier α du premier quadrillage et montrant qu'il est commensurable dans le second. Le lecteur généralisera sans peine cette démonstration : AB est partagé par les verticales du premier quadrillage en un nombre entier de segments égaux : ici 2 : AN et NB. Les coordonnées de N sont donc commensurables, dans le quadrillage de base AB. Il en sera de même pour les coordonnées de P où la verticale de α coupe BK. D'ailleurs ici P est entier dans le nouveau quadrillage. Dans ce nouveau quadrillage, α partage dans un rapport commensurable le segment P à extrémités commensurables. Il a donc des coordonnées commensurables.

Remarquons que malgré la propriété qui précède, les longueurs AM et AB qui servent de bases aux deux quadrillages peuvent être incommensurables. C'est d'ailleurs le cas ici :

$$AB = AM\sqrt{5}.$$

La considération de quadrillages à bases différentes va nous permettre de résoudre le problème suivant : *Mener par un point entier une droite faisant avec une droite donnée un angle V, tel que tg V soit commensurable.* [Il sera dans la pratique commode de définir par exemple l'angle V par l'angle d'une droite quelconque AP avec une horizontale AH du quadrillage (fig. 7)]. La direction AP est ici définie par les coordonnées 3, 2 du point P. Soit AB la droite donnée et M le point par lequel doit être menée la droite cherchée. Construisons le quadrillage de base AB et soit N le point de ce quadrillage de coordonnées 3, 2. On voit immédiatement que la droite cherchée est la parallèle MM' menée par M à AN.

Un cas particulier assez intéressant de ce qui précède est le suivant: Mener par un point une droite faisant 45° avec une droite donnée. Exemple. Les deux directions 2, 1 et 1, 3 font 45° . (CD et CE). Les exemples qui précèdent et que l'on pourra généraliser aisément montrent comment il est possible d'effectuer un grand nombre de constructions sur papier quadrillé. La seule précaution à prendre est de profiter de l'arbitraire, qui existe habituellement sur le choix des données, pour introduire le plus grand nombre possible de points entiers dans l'énoncé. On arrive ainsi à vérifier rapi-

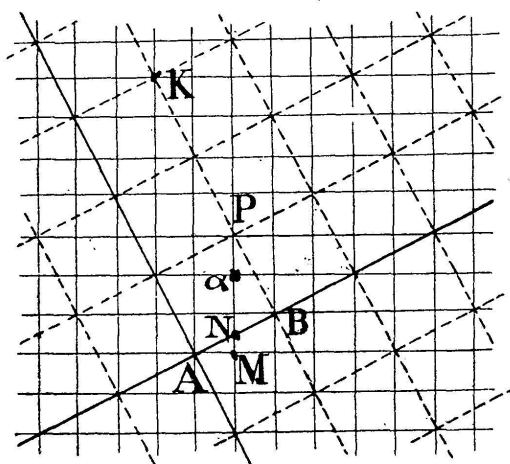


Fig. 6.

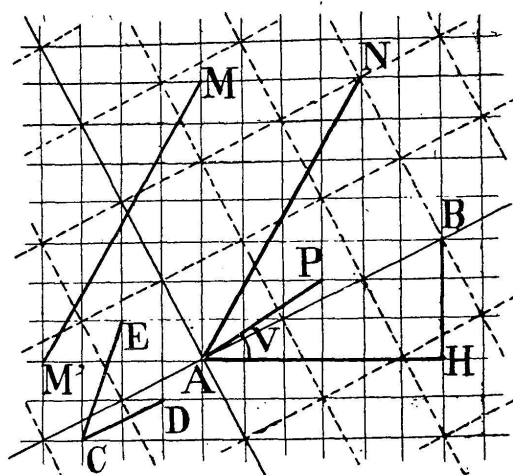


Fig. 7.

dement des énoncés compliqués de géométrie. Malheureusement toutes les figures ne se prêtent pas à de pareilles constructions. Par exemple il est impossible de construire un triangle équilatéral dont les 3 sommets soient entiers (car si ceci avait lieu la tangente trigonométrique de l'angle de 2 côtés serait commensurable). Les courbes quelconques contiennent rarement des points entiers. Signalons comme cas simple souvent utilisé le cercle dont le centre est un point entier et de rayon 5, cercle qui contient 12 points entiers¹.

Nous ne continuerons pas davantage la théorie des points entiers, nous contentant d'énumérer quelques résultats particuliers faciles à établir:

¹ Le triangle dont les sommets ont pour coordonnées 10, 0; 0, 10; -6, -8 a en particulier les pieds des hauteurs, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et du cercle des 9 points, les milieux des côtés qui sont des points entiers. Le point de Lemoine et le centre de gravité sont commensurables et deviendraient entiers par une homothétie convenable.

L'aire d'un polygone dont les sommets sont des points entiers est représentée par un nombre entier ou par la moitié d'un nombre entier (l'unité d'aire étant l'aire du carré de base du quadrillage).

Le lieu des points du plan équidistants de 2 points entiers ne contient des points entiers que si les 2 points donnés sont de même parité, c'est-à-dire si les 2 coordonnées de l'un des 2 points par rapport à l'autre, sont de même parité.

Un cercle défini par 3 points commensurables contient une infinité de points commensurables. En particulier, il est coupé en un point commensurable, par toute droite à coefficient angulaire commensurable, qui passe par un point commensurable de ce cercle.

La distance d'un point commensurable à une droite, définie par 2 points commensurables, n'est commensurable que s'il existe sur la droite 2 points commensurables à distance commensurable. Pour préciser ceci, remarquons que en général cela n'a pas lieu pour une droite quelconque. Ceci aurait lieu par exemple pour une droite de direction 3, 4 car $3^2 + 4^2 = 5^2$. Si maintenant on prend une droite quelconque, et par exemple 2 points entiers consécutifs A et B sur cette droite, à une distance δ (δ étant en général incommensurable) on peut évaluer aisément la distance d'un point quelconque M (fig. 8) à AB. d étant cette distance, $d \cdot \delta$ est un nombre entier (double de l'aire MAB) ici 7. Donc d est le quotient par δ de cet entier; ici $d = \frac{7}{\sqrt{5}}$.

Dans tout ce qui précède, nous avons laissé systématiquement de côté une notion qui se rattache simplement à celle des points entiers : la notion d'entiers imaginaires¹. On appelle ainsi tout nombre $a + bi$ dans lequel a et b sont des entiers positifs ou négatifs, i ayant la signification connue : ($i^2 = -1$). Les affixes de ces nombres sont tous les points entiers du plan. Nous ne traiterons pas cette question nous bornant à citer un seul théorème qui concerne les quadrillages de bases différentes :

Les affixes des multiples, réels ou imaginaires, d'un nom-

¹ *Théorie des Nombres* de M. CAHEN.

bre, réel ou imaginaire, a , sont les sommets d'un quadrillage ayant pour base le segment OA qui joint l'origine au point A , affixe de a .

§ 3. — Applications diverses des propriétés des points entiers.

Les applications à l'arithmétique de la théorie des points entiers sont très nombreuses. Nous serons obligés de faire un choix parmi elles, et de donner simplement quelques exemples de ces diverses applications.

Etant donné la courbe $f(x, y) = 0$ ou plus généralement $f(x, y, a) = 0$ représentée par une équation homogène, a désignant par exemple une longueur de la figure, tout point

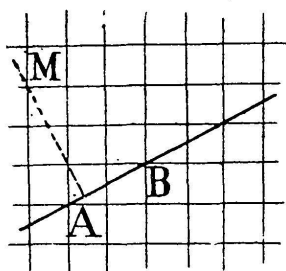


Fig. 8.

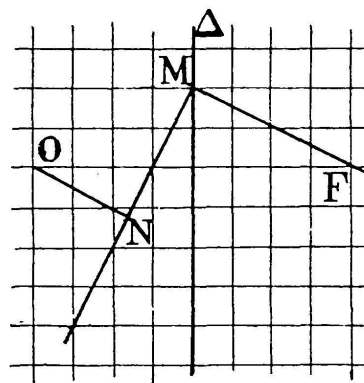


Fig. 9.

entier de cette courbe donnera une solution en nombres entiers de l'équation $f(x, y, a) = 0$. Un point commensurable de coordonnées $\frac{x}{k}, \frac{y}{k}$ donnera une solution en nombres entiers de $f(x, y, ka) = 0$. Citons un exemple de ce genre d'applications: Prenons une droite fixe Δ qui sera une ligne verticale du quadrillage et 2 points O et F, symétriques par rapport à Δ , et entiers. Prenons un point M commensurable variable sur Δ , menons MN, perpendiculaire en M à FM, (fig. 9) et abaissons enfin ON perpendiculaire sur MN. Il est facile de voir que les coordonnées de N sont commensurables. Le lieu de ce point est d'ailleurs une strophoïde. On aura donc des solutions en nombres entiers de l'équation

$$x(x^2 + y^2) = ka(x^2 - y^2) .$$