

III. — Théorèmes simples sur le quadrangle plan et applications à la construction.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Proposons-nous de construire la bissectrice de l'angle AS_xA_1 ; les lignes pointillées sont les prolongements des côtés. (Les points A et A_1 des côtés ne sont plus visibles dans la fig. 4.)

Si $AB_1 = A_1B$, l'axe perspectif des ponctuelles semblables A, B, C, \dots et A_1, B_1, C_1, \dots sera la bissectrice cherchée.

L'habileté du dessinateur consistera à choisir C et C_1 pour que que BC_1 et B_1C ne deviennent pas trop petits et pour que, d'autre part, l'angle CSC_1 ne soit pas trop obtus.

Si on le veut, on peut se contenter de déterminer un seul point de la bissectrice; il remplacera le sommet dans les constructions qui suivent.

Si l'on se propose simplement de déterminer le sommet de S_x , on peut éviter le transport des grands segments $\overline{AB_1} = \overline{A_1B}$; car on obtiendra une approximation suffisante en prenant $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$; le théorème de Carnot nous montre qu'alors AB_1 et A_1B se trouvent égaux à très peu de chose près, — et cela d'autant mieux que les points correspondants auront été choisis symétriques par rapport à S_x autant que faire se peut. Par exemple AB égal à BS_x et A_1B_1 égal à B_1S_x . Si l'on prend $\overline{AB} = \overline{BS_x} = \overline{B_1S_x} = \overline{A_1B_1}$, on obtient l'axe de symétrie.

L'hypothèse que $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ fait dégénérer approximativement la similitude des ponctuelles en égalité, et pour choisir C et C_1 on se bornera à prendre $BC = B_1C_1$ (voir fig. 4).

L'axe perspectif n'est plus la bissectrice, mais détermine néanmoins le sommet avec une approximation suffisante. Cette construction est certainement exacte au point de vue théorique.

III. — Théorèmes simples sur le quadrangle plan et applications à la construction.

1. — DÉMONSTRATION DES PROPRIÉTÉS.

Nous nous proposons de généraliser par la projection parallèle les propriétés des figures 1, 3 et quelques autres qui s'y rattachent immédiatement.

On sait que lors de projections parallèles, les propriétés projectives des figures, et en outre les théorèmes basés exclusivement sur le parallélisme ou sur des propriétés de parallélogrammes, subsistent.

La projection parallèle des figures 1 et 3 détruit l'égalité des segments $PQ', P'Q$; — respectivement $PQ, P'Q'$ — et l'axe perspectif des ponctuelles semblables $PQ \dots; P'Q' \dots$; cesse d'être la bissectrice de l'angle PAP' (fig. 1). Les autres propriétés subsistent.

a) Lorsque la figure 1 aura été transformée par projection parallèle, KK' passera encore par le point A d'intersection de l_1 et l_2 .

En prolongeant KP et $K'Q'$ d'une part, KP' et $K'Q$ d'autre part, on forme un parallélogramme circonscrit au quadrangle $PP'QQ'$ dont la diagonale KK' passe par A.

On peut considérer cette propriété comme cas particulier du théorème de BRIANCHON : puisque les côtés de l'hexagone $KPQK'Q'P'K$ passent alternativement par deux points infiniment éloignés, les droites KK' ; PQ' ; QP' , de jonction des sommets opposés doivent se couper en un même point.

Si nous désignons par T le point d'intersection de KP' avec AP et par T' celui de $K'Q'$ avec AP' les segments situés sur les parallèles $P'T$ et $Q'T'$ forment la proposition

$$P'K : KT = T'K' : K'Q'$$

car les rapports anharmoniques des points situés sur AT' et sur AQ' sont égaux, de même que ceux des groupes sur $Q'T'$ et TP' pour cause de parallélisme. De cette proposition résulte le théorème en question.

On peut encore le démontrer en appliquant aux triangles homologues le théorème de DESARGUES qui dit que la deuxième diagonale du parallélogramme circonscrit cité plus haut passe par le point d'intersection de la paire de côtés opposés PP' et QQ' du quadrangle.

Les quadrangles $PQQ'P'$ et $PQP'Q'$ appartiennent aussi au système des quatre points $PP'QQ'$.

Si l'on dessine comme ci-dessus les parallélogrammes circonscrits à ces quadrangles, le théorème appliqué à ce nouveau parallélogramme nous montre que leurs diagonales passent par les points d'intersection des côtés opposés des quadrilatères correspondants.

Les six diagonales des parallélogrammes ainsi obtenues sont les axes perspectifs des ponctuelles semblables qu'on forme lorsque dans les trois quadrilatères on considère les segments de diagonales dans deux sens comme homologues. Le théorème d'Euler montre que

$$\overline{K'K}^2 = \overline{P'Q}^2 + \overline{Q'P}^2 + \overline{P'Q'}^2 + \overline{PQ}^2 - \overline{P'P}^2 - \overline{Q'Q}^2.$$

b) Imaginons que dans la figure 3 on ait dessiné comme dans la figure 1 pour les paires de points homologues PP' et RR' les points K et K' de la bissectrice de l'angle A ; en outre, qu'on ait construit pour la paire RR' le point A'' analogue de A' et qu'enfin on projette parallèlement toute la figure ; nous constatons, comme dans

la figure 2, que

$$AK = \text{et} \parallel A'S_1 \quad \text{et} \quad AK' = \text{et} \parallel A''S_1$$

d'où résulte que les six diagonales introduites sous la lettre *a*) sont égales et parallèles deux à deux.

De plus, les axes perspectifs AB et $S_1S_2S_3$ sont équidistants aussi bien du milieu de PP' que de celui de RR' ; par suite, la droite joignant ces milieux partage aussi en deux parties égales le segment AS_1 , par exemple, et l'on voit avec évidence éclatante le théorème de Gauss :

Les milieux des trois diagonales du quadrilatère complet $PRP'R'P$ sont en ligne droite.

c) Si dans la projection parallèle de la figure 1 on prolonge les droite QK' et PQ' jusqu'à leur intersection X et de même $Q'K'$ et $P'Q$ jusqu'à leur intersection en Y , la droite XY sera parallèle à PP' , car

$$AK : AK' = AP : AX = AP' : AY .$$

On démontrerait de même qu'on obtient une deuxième parallèle à PP' en joignant le point X_1 d'intersection de PQ avec une parallèle à $P'Q$ passant par Q' au point d'intersection Y_1 de $P'Q'$ avec une parallèle à PQ' par Q . Ce qui nous permet de mener une parallèle à un côté d'un quadrangle complet.

d) Dans la projection parallèle de la figure 1, menons par S une droite quelconque qui coupe les côtés AP et AP' en M et M' ; puis par M' une parallèle à PQ et par M une parallèle à $P'Q'$, ces deux parallèles coupent les côtés en N et N' : *les trois points N , K et N' sont situés en ligne droite.*

Réciproquement à une droite passant par K correspond une droite par S .

On obtiendrait d'une manière analogue une parallèle à NN' passant par le point K' .

Pour le démontrer, il suffit de considérer que les segments MS et $M'S$ sont projetés de deux manières sur NN' par les côtés du parallélogramme $SPKP'$ et les droites MN' et $M'N$.

Le parallélogramme inscrit dans le quadrangle et dont les côtés sont parallèles aux diagonales du quadrangle nous permet de construire le sixième côté dont on ne connaît pas les sommets d'un quadrangle complet déterminé par la position de cinq côtés.

Remarque. Le centre du parallélogramme $PKP'S$ se trouve sur la ligne de Gauss du quadrilatère $MNN'M'M$.

Désignons par $ABCDEF$ les sommets du quadrilatère complet de la figure 5.

Si P et P' divisent les côtés opposés DA et BC en segments proportionnels dirigés dans le même sens, PP' est une diagonale

d'un parallélogramme inscrit dans le quadrangle ABCD et ayant ses côtés parallèles aux diagonales AC et BD.

Fig. 6.

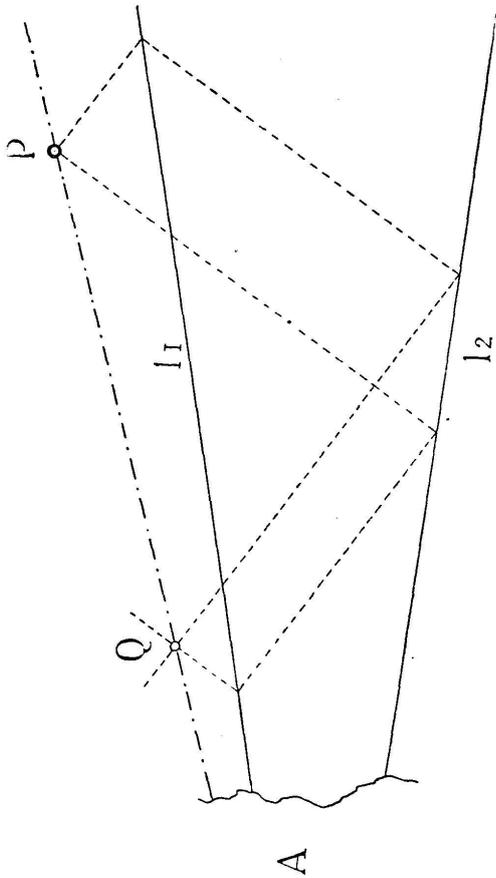


Fig. 7.

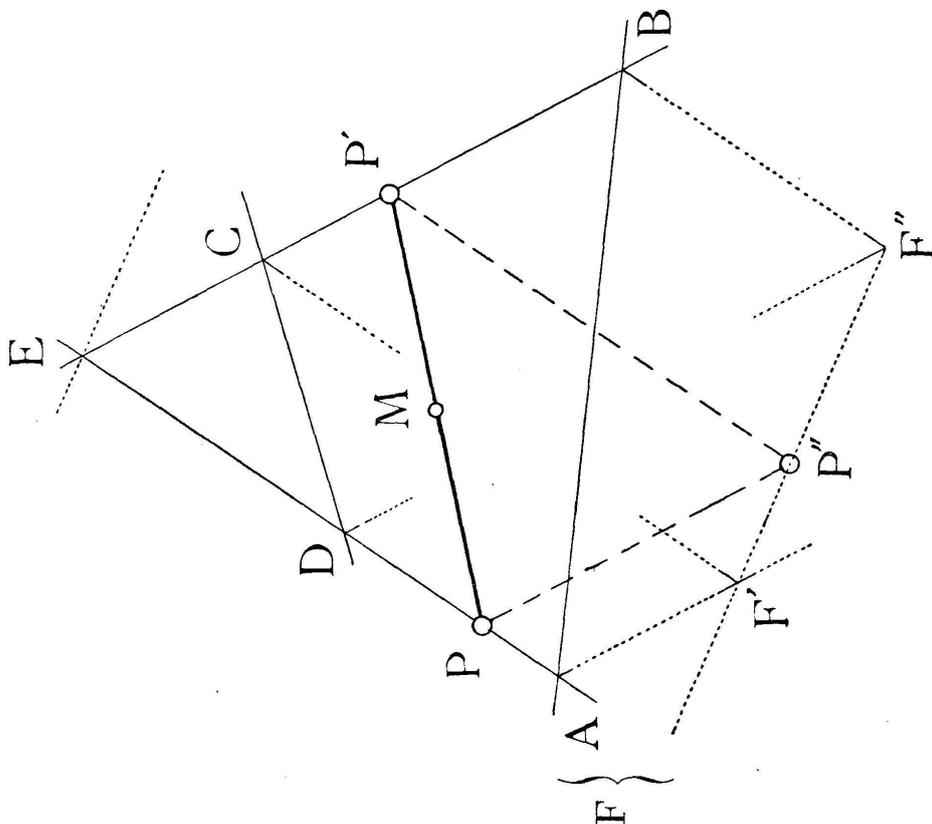
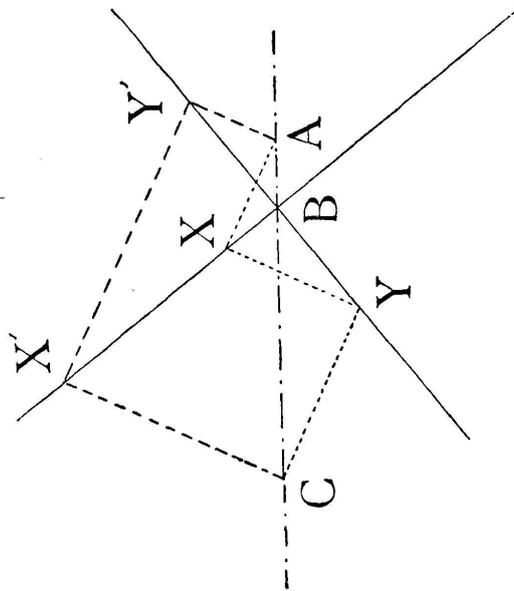


Fig. 5.

Des diagonales du parallélogramme circonscrit au quadrangle ACDB et formé des parallèles aux côtés opposés AD et BC, —

$F'F''$ est celle qui passe par le point F d'intersection des côtés opposés AB et CD . Le prolongement de la diagonale égale et parallèle $E'E''$ du parallélogramme formé des parallèles aux côtés opposés AB et CD passe par E (voir fig. 5).

Les lignes pointillées projettent sur la diagonale $F'F''$ les rapports égaux des segments déterminés par P et P' , donc se coupent sur cette diagonale.

On reconnaît immédiatement que le centre M du parallélogramme $PP'EP''$, c'est-à-dire le milieu de PP' est équidistant des droites EE' et FF' et que, — d'après ce qui précède, — il se trouve sur la droite de Gauss du quadrilatère $ABCD$. Les milieux des segments EF , EF' , EF'' et EP'' , c'est-à-dire les milieux de EF , AC , BD et PP' sont situés sur une droite.

Ce qui nous permet d'énoncer le *nouveau* théorème général :

Si dans les 3 quadrangles simples formés des côtés d'un quadrilatère complet on considère comme segments homologues de ponctuelles projectives semblables les côtés opposés, dirigés dans le même sens, — (au contraire de ce qui se fait lors de la construction par tangentes de la parabole exinscrite au quadrilatère); — on forme 6 paires de ponctuelles dans lesquelles les milieux des segments déterminés par des paires de points correspondants sont situés sur la droite de Gauss du quadrilatère.

Ce théorème est appliqué à la construction dans la figure 12.

Corollaire. La droite de Gauss du quadrangle partage les côtés opposés des trois quadrilatères en segments homologues. Elle est donc tangente aux six paraboles obtenues comme enveloppes à l'aide des six paires de ponctuelles.

2. APPLICATIONS DE CES PROPRIÉTÉS A LA CONSTRUCTION.

a) *Joindre un point donné P au point d'intersection A de 2 droites qui ne se coupent pas dans les limites de la figure.*

La projection parallèle de la fig. 1 donne le principe de la solution. Si le point donné est l'un des points K ou K' , la construction consiste à déterminer l'autre :

On choisira de préférence des lignes de construction rectangulaires, afin de pouvoir les tracer par simple translation d'équerre (fig. 6). Des 2 constructions possibles, on préférera celle qui se dirige vers le sommet de l'angle.

Une des plus anciennes solutions de ce problème est due à LAMBERT, mais elle devient impraticable quand le point donné est trop voisin de la bissectrice. Elle consiste à construire 2 triangles homologues dont les sommets sont 3 à 3 sur les 2 droites données; 2 côtés homologues se trouvent également sur ces droites, tandis que les deux autres paires déterminent l'axe d'homologie, c'est-à-dire la droite cherchée.

Considérons un des sommets situés sur l_1 ou l_2 comme point donné P qu'il s'agirait de joindre au centre d'homologie déterminé par l'intersection inaccessible de 2 droites et qu'on peut considérer comme centre de 2 ponctuelles perspectives situées sur l_1 et l_2 , dont l'axe coïncide avec l'axe d'homologie de la construction de Lambert. On obtient ainsi le point perspectif à P et la droite cherchée.

Cette construction est encore praticable lorsque celle de Lambert ne l'est plus, elle détermine doublement le point auxiliaire nécessaire, d'où une preuve. Le cas particulier où les supports des ponctuelles sont parallèles est résolu du même coup.

b) *Droite joignant deux points très rapprochés* (fig. 7 et 8).

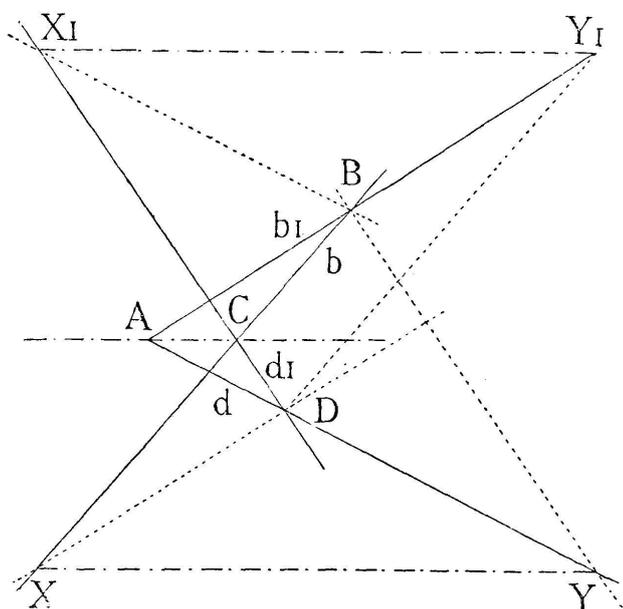


Fig. 8.

La fig. 7 montre la construction de AB à l'aide d'un point auxiliaire C.

Nous avons mené par B deux droites rectangulaires convenablement choisies ; nous imaginons que B soit déterminé par l'intersection supposée inaccessible de ces 2 droites rectangulaires et nous appliquons la construction de la fig. 6 ; c'est-à-dire que nous faisons partir de A 2 traits rectangulaires couvés en X et Y ; — Y' et X' qui se coupent en C et forment un hexagone dont B est point de Brianchon.

Dans la fig. 8, nous considérons les points voisins, C et A comme déterminés par l'intersection des droites bd_1 et b_1d . En appliquant au quadrangle ABCD la construction indiquée plus haut sous la lettre c), on obtient à l'aide de 2 parallèles une droite XY ou $X_I Y_I$ parallèle à AC.

On utilise souvent dans ce problème la configuration de Desargues, qui nécessite 2 droites de plus pour déterminer le point auxiliaire, et l'une d'elles se trouve précisément aussi mal déterminée par 2 points voisins.

c) *Joindre les points d'intersection de 2 paires de droites qui ne se coupent pas dans les limites de la figure.*

Soient g_1 et g_2 ; l_1 et l_2 les droites dont on veut joindre les points d'intersection. Dans la figure 9, nous avons appliqué 2 fois la construction de la figure 6.

Si le point F seulement était inaccessible et qu'il s'agisse de le joindre au point E, les droites l_1 et l_2 joueraient le rôle des lignes

brisées auxiliaires de la fig. 6 et partant de E elles déterminent un point de la droite cherchée après avoir été coudées 2 fois sur les côtés g_1 et g_2 suivant EBNL et EDN'L.

D'une manière analogue g_1 et g_2 déterminent le point G.

En vertu de ce que nous avons dit à propos de la fig. 8, il faut que LG soit parallèle à M'N' et à MN, d'où une première vérification.

On peut en introduire d'autres; en joignant le point d'intersection S de MD et de M'B à celui de N'D et de NB on obtient une parallèle à LG, et les points milieux de BD; de M'N; de N'M; de MM' et de NN' sont équidistants de ces deux droites.

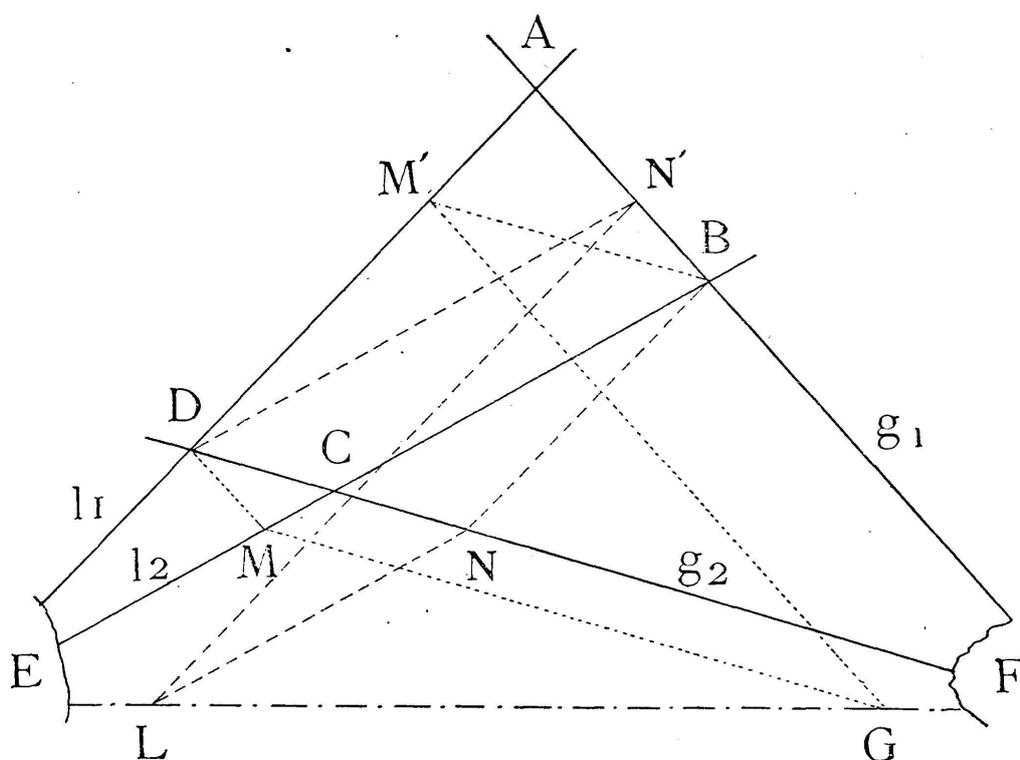


Fig. 9.

La droite joignant les milieux de DB et de MM' étant la ligne de Gauss du quadrilatère DMBM'D, elle partage en 2 parties égales la diagonale SE.

On pourrait se servir de la parallèle de vérification menée par S, pour la construction, en menant par exemple par le milieu de BD 2 droites quelconques et en utilisant l'équidistance.

On peut déterminer au moyen de parallèles seulement les points équidistants correspondants aux points d'intersection de la parallèle de vérification avec g_1 et l_1 .

On obtient encore une parallèle à EF en joignant le point D au point d'intersection des parallèles à g_2 et l_2 menées par M et M'.

La disposition défavorable des éléments donnés dans la fig. 10 ne permet pas l'application immédiate de la construction ci-des-

sus, on pourra procéder comme suit : on a considéré C comme point donné, les derniers segments des 2 lignes brisées qui devraient déterminer le point auxiliaire X de AC ont été prolongés en arrière jusqu'aux intersections G_1 et G_2 avec g_1 et g_2 pour former le parallélogramme G_1XG_2C dans lequel on voit que le milieu M de G_1G_2 est un point de la droite cherchée AC.

On pourra joindre le point M à A ou à C d'après la construction de la figure 6.

Si cette construction est difficilement exécutable, on peut, comme dans la fig. 10 appliquer la construction de la fig. 8 pour déterminer à l'aide de M une parallèle PQ à AC.

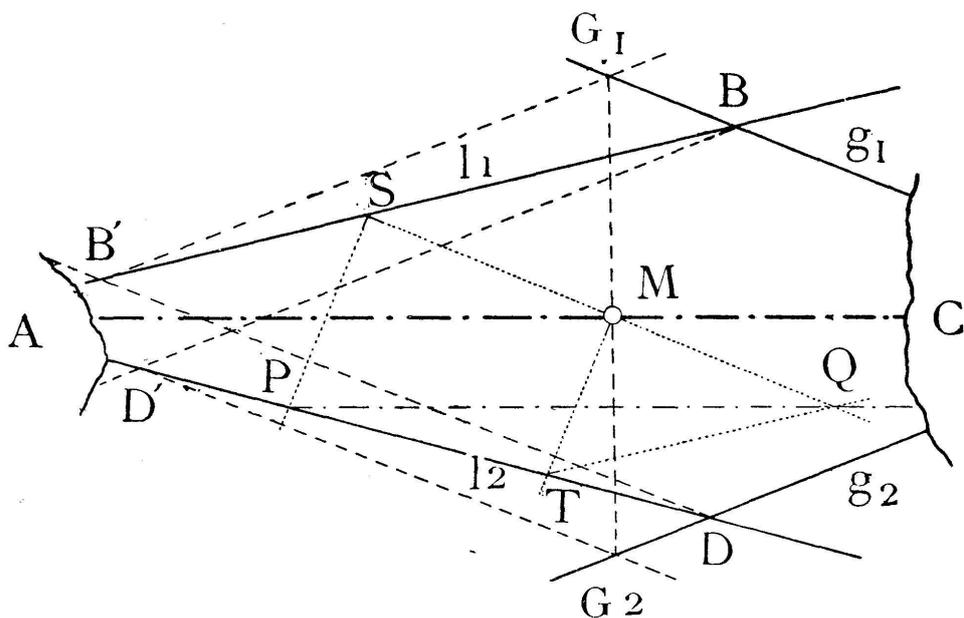


Fig. 10.

Pour cela nous menons par M 2 perpendiculaires quelconques et nous appliquons la règle énoncée plus haut sous la lettre c.

Cette construction est réversible, c'est-à-dire que la parallèle PQ à AC peut permettre de déterminer le milieu M de AC.

Dans la figure 11 on utilise cette construction de la parallèle, et la construction inverse pour joindre les 2 points très éloignés S et T.

Ce cas difficile est ainsi très simplement résolu dans un minimum d'espace et avec une grande exactitude, vérifiée d'ailleurs par la double disposition possible.

La construction résultant de la propriété citée au § précédent sous c) n'a pas été appliquée à la lettre, on a remplacé un des 2 sommets à joindre par un point de la droite qui les relie, ce qui revient évidemment au même.

Ainsi dans la figure 11, P est remplacé par R' (respectivement R'') pour déterminer la parallèle $Q'N'$ (respectivement $Q''N''$) à ST.

On applique la construction inverse pour déterminer le point

d'intersection X de PQ et de ST en utilisant à gauche le point Q' et à droite Q'' .

Remarquons la marche générale de la construction : nous avons mené successivement : $P'Q' \parallel PQ$; $Q'R' \parallel QQ''$; $R'N' \parallel PP''$; $QN' \parallel PP'$ et enfin $Q'N' \parallel ST$.

Le point cherché X est à l'intersection de PQ et de $P'N'$.

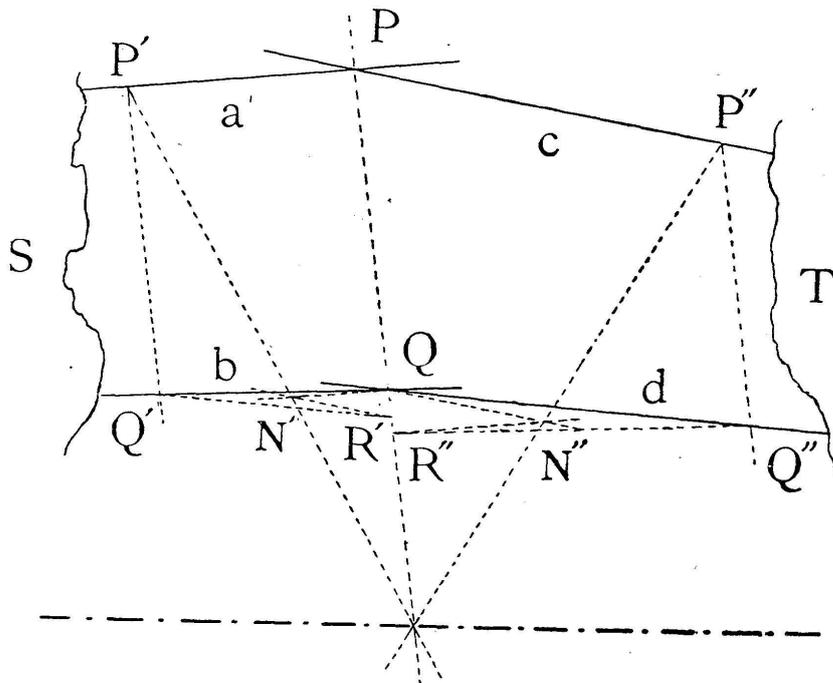


Fig. 11.

Par le point d'intersection de deux droites qui se coupent hors des limites de la figure, mener une parallèle à une troisième droite.

D'après ce qui précède nous pourrions résoudre le problème, c'est-à-dire déterminer un point de la parallèle cherchée à l'aide

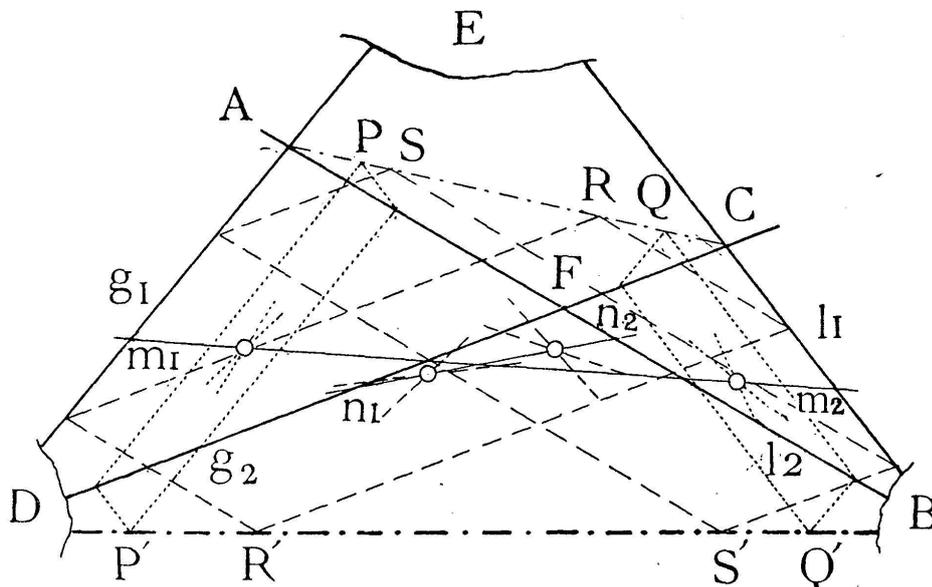


Fig. 12.

du point d'intersection de la troisième droite avec *une* des deux autres, tandis que la plupart des méthodes connues ne sont applicables que si les points d'intersection de la troisième avec les *deux* premières sont accessibles.

Dans le cas où les 2 points d'intersection se trouvent dans les limites du dessin, 2 dispositions nous seront possibles.

Le problème peut encore être résolu par application de la construction 9 dont il constitue le cas particulier où l'un des points inaccessibles est infiniment éloigné ; c'est l'autre qu'on considérera comme point donné.

Dans la figure 12 nous appliquons ce qui a été dit sous la lettre

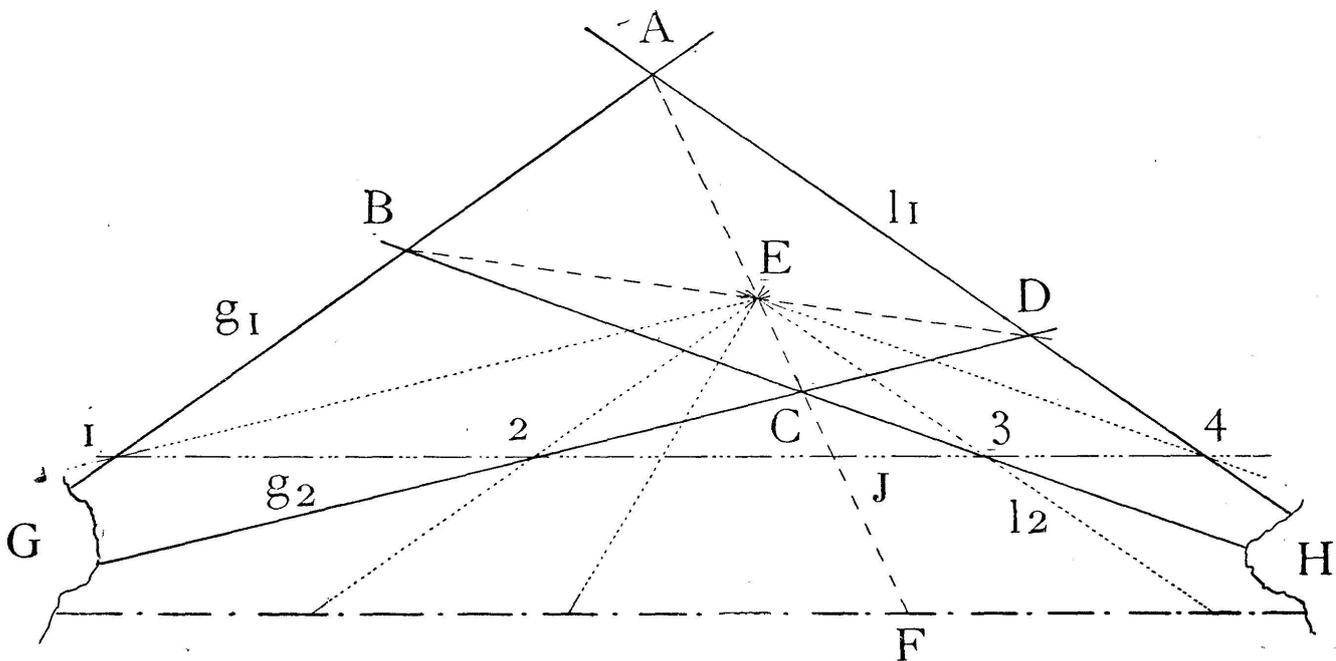


Fig. 13.

d), du paragraphe précédent, à la construction de la droite de jonction des points inaccessibles B et D au moyen de parallélogrammes.

Si comme dans la figure 13 on connaît le point E d'intersection des diagonales AC et BD, on construira, — pour trouver les points correspondants sur GH, — des parallélogrammes dont 2 diagonales coïncident, sont parallèles à GH et partagent en 2 parties égales la distance de E à cette droite. Ces diagonales sont déterminées par 2 de leurs 4 extrémités (1 et 3 par exemple), il suffira de prolonger d'une longueur égale à eux-mêmes 2 rayons menés du point E à la droite (1,3), par exemple $EI = IF$.