

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1909)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UNE CLASSE DE CONGRUENCES DE DROITES  
**Autor:** Godeaux, Lucien  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-11857>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

N étant une grandeur finie arbitrairement grande. Il est nécessaire de supposer ici que, pour  $\lim \rho = \infty$ ,  $\Delta^\rho \Phi(0)$  s'approche de zéro au moins aussi rapidement que  $\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\rho+1}$ .

Ugo BROGGI (Buenos-Aires).

## SUR UNE CLASSE DE CONGRUENCES DE DROITES

1. — Les déterminants du type

$$(I) \quad \left| a_{ik,y}^{n-i} a_{ik,z}^i \right| = 0 \quad (i, k = 0, \dots, n)$$

où  $a_y, a_z$  sont des formes linéaires quaternaires, peuvent s'écrire en fonction des coordonnées plückériennes de la droite. On peut donc dire que (I) représente un complexe de droites d'ordre  $\frac{n(n+1)}{2}$ . De tels complexes ont été rencontrés par M. NEUBERG<sup>1</sup> et par nous<sup>2</sup>.

De même, l'évanouissement d'une matrice

$$(II) \quad \left\| a_{iky}^{n-i} a_{ikz}^i \right\| = 0 \quad (i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, n+1),$$

représente une congruence réglée dont nous allons déterminer l'ordre et la classe au moyen des méthodes de MM. GIAMBELLI<sup>3</sup> et STUYVAERT<sup>4</sup>.

2. — Pour trouver l'ordre  $\mu$ , supposons les  $y$  fixes dans la matrice (II). Cette matrice doit représenter un nombre fini de droites lorsqu'on considère les  $z$  comme les coordonnées courantes.

Supposons que le plan  $z_4 = 0$  n'est pas un plan singulier

<sup>1</sup> *Mathesis*, 1902, II<sub>3</sub>.

<sup>2</sup> *Bul. de l'Acad. de Belgique*, 1907. — *N. A. M.* 1907, VII<sub>4</sub>. — *Mémoires de la Soc. des Sc. du Hainaut*, 1908, IX<sub>6</sub>.

<sup>3</sup> *Mém. Ist. Lomb.*, 1904. — XI<sub>3</sub>.

<sup>4</sup> *Mém. Soc. Sc. Liège*, 1908. — VII<sub>3</sub>.

de la congruence. Si nous faisons  $z_4 = 0$  dans (II), le nombre de solutions  $(z_1, z_2, z_3)$  sera l'ordre de la congruence.

On a

$$\mu = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \mu',$$

$\mu'$  étant le nombre de solutions de la matrice

$$\| a_{iky}^{n-i} a_{ikz}^i \| = 0 \quad (i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, n-1)$$

De même, si  $\mu''$  est le nombre de solutions de la matrice

$$(III) \quad \| a_{iky}^{n-i} a_{ikz}^i \| = 0 \quad (i = 0, \dots, n-2, k = 0, \dots, n-1),$$

on a

$$\mu' = \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{4} - \mu''.$$

De là

$$\mu = \frac{n}{2} (2n^2 - n + 1) + \mu''.$$

L'analogie en  $z$  de (II) et (III) permet de conclure à la formule

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=0} (n-2i) [2(n-2i)^2 - (n-2i) + 1],$$

la sommation s'étendant jusqu'au premier terme nul ou négatif.

3. — Pour trouver la classe  $\nu$ , cherchons d'abord l'ordre-classe  $\lambda = \mu + \nu$ .

Supposons que les droites

$$y_1 = y_2 = 0, \quad z_3 = z_4 = 0$$

soient indépendantes de la congruence (II).

Introduisons ces hypothèses dans la matrice (II), et posons,  $\sigma$  et  $\tau$  étant deux facteurs de proportionnalité

$$\begin{aligned} \sigma y_3 &= \rho_1, & \tau z_1 &= \rho_2, \\ \sigma y_4 &= \rho_2, & \tau z_2 &= \rho_3. \end{aligned}$$

Le nombre de solutions  $(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  de la matrice (II) sera égal au nombre de droites de la congruence s'appuyant sur les droites

$$y_1 = y_2 = 0, \quad z_3 = z_4 = 0,$$

sauf  $2n$  de ces solutions.

Tous les termes de la matrice (II) sont de degré  $n$  en  $\rho$ , donc la matrice s'annule pour des valeurs des  $\rho$  en nombre

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{(n-i)^2 (n-i+1)^2}{4}.$$

Mais la première colonne de la matrice s'annule  $n$  fois pour  $\rho_1 = \rho_3 = 0$ ; il en est de même de la dernière pour  $\rho_2 = \rho_3 = 0$ .

Ces solutions sont impropres, donc

$$\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{(n-i)^2 (n-i+1)^2}{4} - 2n.$$

Enfin

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{(n-i)^2 (n-i+1)^2}{4} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-2i) [2(n-2i)^2 - (n-2i) + 1] - 2n. \end{aligned}$$

Lucien GODEAUX (Liège).