Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1908)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE 5me LIVRE DE GÉOMÉTRIE
Autor: Hioux, V.
Kapitel: Deuxième partie
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10985

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Deuxième partie.

III. Parallélisme d'une droite et d'un plan.

5. — Définition. On dit qu'une *droite* et un *plan* sont parallèles lorsque la droite a tous ses points à la *même* distance du plan.

Théorème I. Si une droite AB a deux points A et B à la même distance l d'un plan P, elle est parallèle au plan.

Démonstration. Des points A et B (fig. 3) menons les perpendiculaires AA′ et BB′ sur le plan P. Ces droites sont parallèles et déterminent un plan R qui coupe le plan P suivant la droite A′B′ ; d'ailleurs, par hypothèse, AA′ = BB′, donc, puisque ces droites sont en outre l'une et l'autre perpendiculaires sur A′B′ le quadrilatère AA′B′B est un rectangle. D'un point M quelconque de AB menons dans le plan R la parallèle MM′ à BB′ par exemple. Cette droite est perpendiculaire au plan P et par suite perpendiculaire sur A′B′ ; le quadrilatère BB′M′M a ses côtés parallèles 2 à 2, c'est donc un parallélogramme et, de plus, c'est un rectangle dans lequel on a MM′ = BB′. Donc la distance au plan P des divers points de AB est partout la même ; cette droite est donc parallèle au plan P. C. Q. F. D.

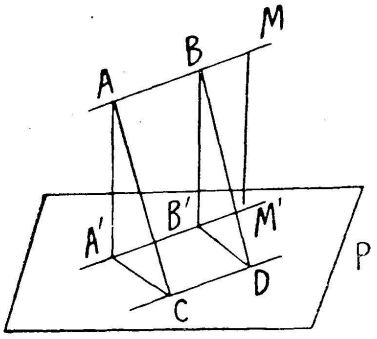

Fig. 3

6. — Théorème II. Si une droite AB est parallèle à une droite CD du plan P, elle est parallèle à ce plan.

Démonstration. De deux points A et B de la droite AB (fig. 3) menons les perpendiculaires AA′ et BB′ sur le plan P. Menons ensuite dans le plan P les perpendiculaires A′C et B′D sur la droite CD et traçons enfin les droites AC et BD.

D'après le théorème des 3 perpendiculaires ces droites sont l'une et l'autre perpendiculaires sur CD ; elles sont par conséquent parallèles et en outre égales puisque les droites AB et CD sont parallèles par hypothèse. Dès lors les deux triangles rectangles AA′C et BB′D ont leurs hypoténuses

égales; en outre leurs angles aigus en A et en B sont égaux parce qu'ils ont leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens. Donc les deux triangles sont égaux et l'on a AA′ = BB′. La droite AB a donc deux points à la même distance du plan P; elle est par conséquent parallèle au plan. C. Q. F. D.

7. — Théorème III. Si par une droite AB parallèle à un plan P, on fait passer un plan Q qui le coupe suivant une droite CD, cette droite est parallèle à la droite AB.

Démonstration. De deux points A et B de la droite AB (fig. 3) menons d'abord les perpendiculaires AA′ et BB′ sur le plan P; menons ensuite dans le plan Q les perpendiculaires AC et BD à la droite CD. Ces deux couples de droites sont parallèles 2 à 2 et de même sens et par conséquent les angles aigus A′AC et B′BD sont égaux; dès lors si on trace les droites A′C et B′D on forme deux triangles rectangles, AA′C et BB′D qui ont un côté égal AA′ = BB′ adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ces triangles sont égaux; il en résulte AC = BD; mais ces droites sont parallèles, et par conséquent le quadrilatère ACDB est un parallélogramme dans lequel CD est parallèle à AB. C. Q. F. D.

8. — Théorème IV. Si une droite AB est parallèle à un plan P et que par un point C du plan on lui mène une parallèle, cette droite est contenue toute entière dans le plan P.

Démonstration. En effet (fig. 3) le point C et la droite AB déterminent un plan Q qui coupe le plan P suivant une droite CD parallèle à la droite AB; mais par le point C on ne peut mener qu'une parallèle à la droite AB; donc la parallèle en question est la droite CD située toute entière dans le plan P.

Remarque particulière. Si par deux droites parallèles AX et BY d'un plan R (fig. 1) on fait passer deux plans P et Q qui se coupent suivant une droite CZ, cette droite est parallèle au plan R.

En effet, la droite CZ est parallèle à une droite AX du plan R, donc elle est parallèle à ce plan.

9. Pour terminer ce paragraphe nous nous bornerons à énoncer les propositions suivantes :

1° Si une droite AB est parallèle à un plan P toute per-

pendiculaire au plan P est perpendiculaire ou orthogonale à la droite AB.

Corollaire. — Une droite et un plan parallèles sont partout également distants: de sorte que si la droite a un de ses points dans le plan, elle y est contenue toute entière.

2° Les portions de deux droites parallèles comprises entre une droite AB et un plan P qui lui est parallèle sont égales.

3° Si une droite AB est parallèle à un plan P on peut, par une translation rectiligne, placer cette droite dans le plan.

Démonstration. — En effet, par la droite AB (fig. 3) menons un plan Q qui coupe le plan P suivant une droite CD. Puisque ces deux droites sont parallèles on sait que par une translation rectiligne en peut amener AB à coïncider avec CD. La droite AB sera ainsi placée dans le plan P.

C. Q. F. D.

IV. — Parallélisme de deux plans.

10. — Définition. On dit que deux plans P et Q sont *parallèles* lorsque l'un des deux a tous ses points à la *même* distance de l'autre.

Théorème I. — Si deux plans P et Q sont perpendiculaires à une même droite LL', en deux points différents A et B, ces plans sont parallèles.

Démonstration. — Nous allons prouver que le plan P a tous ses points à la même distance AB du plan Q (fig. 4).

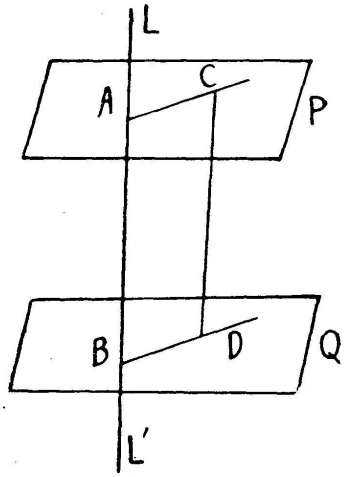

Fig. 4.

Dans le plan P prenons arbitrairement un point C et de ce point menons la droite CD perpendiculaire sur le plan Q. Les droites AB et CD perpendiculaires au plan Q sont parallèles; mais la droite BA est aussi perpendiculaire au plan P, donc il en est de même de sa parallèle DC. Le quadrilatère ABCD a donc ses quatre angles droits; c'est un rectangle dans lequel les côtés opposés AB et CD sont égaux. Le plan P a donc

tous ses points à la même distance AB = l du plan P ; donc ces deux plans sont parallèles. C. Q. F. D.

Remarque. — Puisque DC = BA = l et que DC est perpendiculaire au plan P on constate que le plan Q a tous ses points à la *même* distance l du plan P . Si donc on envisage les deux plans P et Q au point de vue de la distance à l'un d'eux de tous les points de l'autre il y a *réciprocité* entre ces deux plans.

Corollaire. — Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite située dans l'un d'eux est parallèle à l'autre.

En effet, si cette droite est dans le plan P par exemple, elle a tous ses points à la même distance du plan Q ; donc elle est parallèle à ce plan. C. Q. F. D.

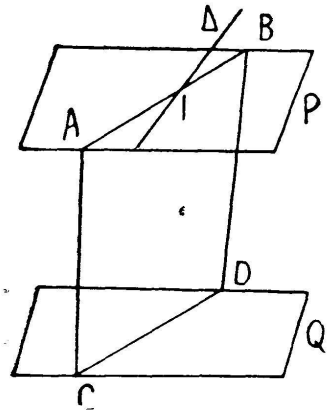

Fig. 5

11. — Théorème II. Les intersections de deux plans parallèles P et Q par un 3e plan R sont parallèles.

Démonstration. Par une droite AB du plan P et un point C du plan Q (fig. 5) faisons passer un plan R qui coupe le plan Q suivant une droite CD. Puisque la droite AB du plan P est parallèle au plan Q, l'intersection CD des plans R et Q est parallèle à la droite AB. C. Q. F. D.

Corollaire. Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite Δ qui rencontre l'un, rencontre l'autre.

Démonstration. Supposons que la droite Δ (fig. 5) rencontre le plan P au point I. Par cette droite et un point C du plan Q faisons passer un plan R.

Il coupe les plans P et Q suivant deux droites parallèles AB et CD ; or, la droite Δ rencontre AB au point I, donc elle ira rencontrer sa parallèle CD dans le plan R ; donc la droite Δ rencontre le plan Q. C. Q. F. D.

12. — Théorème III. Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Démonstration. Supposons (fig. 4) que les plans P et Q soient parallèles. Si, en un point A du plan P, on mène la perpendiculaire à ce plan elle ira rencontrer le plan Q en un cer-

tain point B. Par la droite AB faisons passer un plan R ; il coupera les deux plans P et Q suivant deux droites parallèles AC et BD. Or, la droite AB , perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire sur AC ; elle est par conséquent perpendiculaire à sa parallèle BD dans le plan. On voit ainsi que la perpendiculaire AB au plan P est perpendiculaire à une droite quelconque BD passant par son pied dans le plan Q ; donc, toute perpendiculaire au plan P est perpendiculaire au plan Q. C. Q. F. D.

Corollaire. Si deux plans P et Q sont parallèles à un même plan R, ces plans sont parallèles.

Démonstration. En effet, une perpendiculaire quelconque au plan R sera perpendiculaire à chacun des plans P et Q. Donc (th. I) ces plans sont parallèles. C. Q. F. D.

Remarque. Si deux plans parallèles P et Q ont un point commun M ces plans coïncident.

Démonstration. La perpendiculaire en M au plan P, par exemple, est également perpendiculaire au plan Q qui lui est parallèle ; il suit de là que les deux plans P et Q sont perpendiculaires à une même droite, au même point M ; donc ces plans coïncident. C. Q. F. D.

13. — Théorème IV. Par un point A, extérieur à un plan Q, on peut mener un plan P parallèle au plan Q, et on n'en peut mener qu'un seul.

Démonstration. Du point A (fig. 4) on peut mener la perpendiculaire AB sur le plan Q ; on peut ensuite mener au point A un plan P perpendiculaire sur AB. Ce plan sera parallèle au plan Q puisqu'ils seront l'un et l'autre perpendiculaires à la même droite AB.

Si on imagine par le point A un autre plan P′ parallèle au plan Q, les deux plans P et P′ parallèles au même plan Q seront parallèles entre eux, et à cause de leur point commun A ces plans coïncideront. Donc par le point A on peut mener un plan et un seul parallèle au plan Q. C. Q. F. D.

Corollaire. Si par un point A, extérieur à un plan Q, on mène des parallèles en nombre quelconque à ce plan, elles sont toutes situées dans le plan P parallèle au plan Q et passant par le point A.

Il suit de là que : Si deux angles ont leurs côtés parallèles 2 à 2 leurs plans sont parallèles.

Nous nous bornons à l'énoncé de ces propositions ainsi que des suivantes.

14. — 1°. Deux plans parallèles P et Q sont partout également distants.

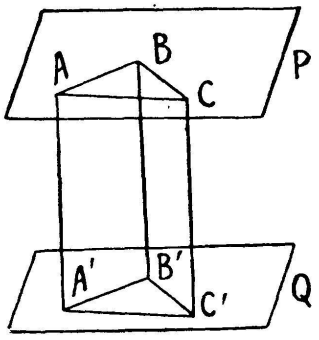

Fig. 6

Cela résulte des théorèmes I et III de ce paragraphe.

2°. Les portions de deux droites parallèles comprises entre deux plans parallèles P et Q sont égales.

3°. Enfin nous terminerons par le théorème suivant.

THÉORÈME V. Si deux plans P et Q sont parallèles, on peut, par une translation *rectiligne*, amener l'un d'eux en coïncidence avec l'autre.

Démonstration. Entre les deux plans donnés (fig. 6), plaçons 3 droites parallèles AA′, BB′ et CC′ non situées dans le même plan ; ces trois droites ont la même longueur l.

Si on fait subir au triangle ABC et par suite au plan P une translation rectiligne égale et parallèle à AA′, chacune des 3 droites AA′, BB′ et CC′ glissera sur elle-même ; et comme elles sont égales, les 3 points A, B et C viendront simultanément se placer sur les points A′, B′ et C′ du plan Q.

Dès lors le plan P coïncidera avec le plan Q.

C. Q. F. D.

V. HIOUX (Paris).