III. — Triangles sphériques et rotations successives d'un solide.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Ces cinq modes de dallages sphériques font évidemment connaître aussi cinq solides, limités par des polygones réguliers qui sont réunis par leurs côtés et assemblés par angles polyèdres réguliers ; ces solides, nommés *polyèdres réguliers convexes,* ont tous leurs sommets situés sur la surface sphérique que l'on a envisagée.

III. — Triangles sphériques et rotations successives d'un solide.

Glissement sphérique. — Quand un corps solide reste cloué par un point fixe O et qu'il se meut, ce mouvement se nomme un mouvement de *pivotement;* une portion du solide qui est à un instant sur une surface sphérique ayant le point O comme centre demeurera sans cesse sur la surface de cette même sphère. Comme trois points définissent un solide, on peut dire que le mouvement de pivotement équivaut au glissement d'une figure sphérique sur sa sphère.

1° *Effet de deux rotations successives.* Soient marqués sur la sphère considérée les pôles de deux rotations successives; sans doute, pour chaque rotation on pourrait hésiter entre deux pôles, mais nous adopterons le pôle sur lequel un observateur marchant sur la sphère, étant posé tête hors la sphère, verrait s'accomplir la rotation considérée dans un sens déterminé par rapport à sa gauche et à sa droite; A (fig. 72) est le point de la sphère fixe qui va être le pôle de la *première* rotation; B est le point de la sphère fixe qui va être le pôle de la *deuxième* rotation.

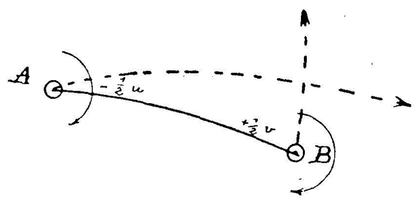

Fig. 72.

On peut même supposer que ces rotations soient chacune moindre qu'un demi-tour, soit alors u la rotation sur A vue par l'observateur posé sur le pôle A dans le sens des aiguilles d'une montre, soit de même v la rotation également orientée sur le pôle B.

Nous nous proposons de construire un point de la figure sphérique entraînée qui finalement n'aura pas bougé; à cet effet joignons le premier pôle A au second par un arc de grand cercle AB moindre qu'une demi-circonférence.

Faisons tourner (fig. 73) l'arc $\overrightarrow{AB}$ autour de A d'un angle $\frac{1}{2}u$, mais en sens contraire du sens de la rotation donnée, nous obtenons sur l'hémisphère (1) un arc AX; faisons de même tourner l'arc $\overrightarrow{BA}$ autour du second pôle d'un angle $\frac{1}{2}v$,

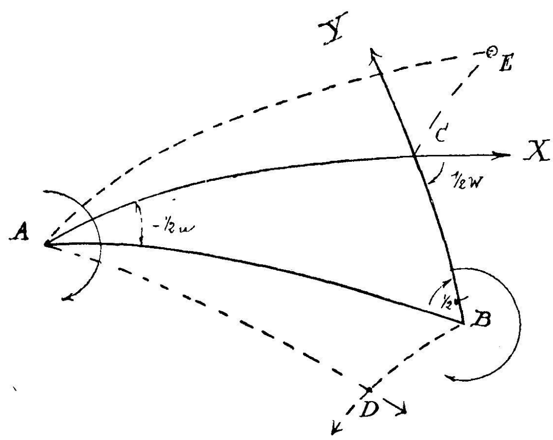

Fig. 73.

mais dans le sens même de la seconde rotation; nous obtenons ainsi un arc BY allant encore sur l'hémisphère (1); les deux arcs AX et BY se croisent sur l'hémisphère (1) en un point C.

Le point de la figure sphérique qui était en C avant la première rotation va par cette rotation venir en D, position symétrique de C par rapport au plan de l'arc AB; la seconde rotation ramène le point D en C. C n'a donc, en définitive, point bougé.

Donc, le déplacement final du solide résulte d'une rotation autour de C qui représente sur la sphère *l'axe* qui joint à C le centre O de la sphère.

Ainsi deux rotations dont les axes se croisent en un point O *sont remplaçables par une rotation unique dont l'axe passe aussi par le même point* O.

Remarque. — Si l'ordre des rotations avait été changé, mais si leurs grandeurs et si leurs pôles sur la sphère fixe avaient été maintenus, le pôle C de la rotation unique remplaçant les deux autres eût été au point D.

Grandeur de la rotation remplaçante. — Soit (fig. 73) E le point symétrique de B par rapport au plan de l'arc AX, le point E de la figure sphérique vient en B par la première rotation, de plus il y demeure pendant la seconde rotation.

De là résulte que l'angle $\widehat{XCB}$ extérieur au triangle ACB représente la moitié $\frac{1}{2}$ w de la rotation *remplaçante* w.

2° Théorème. — *Tout déplacement défini de pivotement sur un point* O *peut toujours être réalisé par une rotation exécutée autour d'un certain axe passant par* O.

En effet, une figure sphérique a toujours sa situation définie par les situations de deux de ses points ; or le changement des positions de ceux-ci peut toujours être produit par un premier changement amenant le point P (fig. 74) en sa position finale P′, suivi d'une rotation *convenable* autour du pôle P′, qui laisse la droite OP′ invariable.

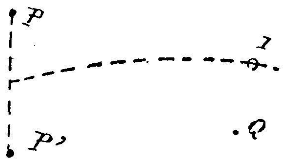

Fig. 74.

Le premier changement peut être réalisé par une rotation convenable exécutée autour d'un pôle I appartenant à l'arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc PP′ en son milieu, *et ceci, même d'une infinité de manières*. Le déplacement final de la figure est donc produit par une première rotation autour de I suivie d'une seconde rotation autour de P′ ; or nous venons de voir que ces deux déplacements successifs peuvent être remplacés par une rotation unique, et le théorème est démontré.

Remarques. — Il est d'ailleurs bien évident, d'après la définition de la ligne droite, et les propriétés des trames, que deux rotations autour de deux axes concourants ne s'équivalent que si elles sont exécutées autour d'un même axe. D'où la conséquence suivante :

Autre remarque. — Si le pôle A est donné, le lieu des axes des secondes rotations qui produisent après une rotation de pôle A un pivotement *total donné* est un plan, c'est le plan du grand cercle qui fait en C avec l'arc $\overrightarrow{CX}$ (fig. 73) l'angle *déterminé* $\frac{1}{2}$ w.

IV.— Fin de la Géométrie qualitative. Prévision de la Géométrie métrique.

Un triangle plan ou un triangle sphérique, image d'un trièdre, renferment 6 éléments : 3 côtés et 3 angles ; notons seulement que dans un triangle sphérique les mots côtés, appliqués aux arcs de cercle qui forment les côtés, désignent en réalité : les angles au centre de la sphère dont ces arcs sont les images, ou encore les faces du trièdre correspondant au triangle sphérique.